

Proseminar Mathematik löst praktische Probleme

Ottomotor

SASCHA HANKELE
sascha@hankele.com

27. Juni 2008

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Ottomotor	3
2.1	Aufbau	3
2.2	Funktionsweise	4
3	Aufstellen der Differentialgleichung	5
3.1	Zugeführte Wärmemenge	5
3.2	Modell des Brennverlaufs	6
3.3	Differenzialgleichungen für Temperatur T und Druck p	7
3.3.1	Wandfläche des Zylinders	7
3.3.2	Volumen des Zylinders	7
3.3.3	Herleitung	7
4	Numerische Berechnung	9
4.1	Temperaturverlauf	9
4.2	Druckverlauf	11
4.3	p-V Diagramm	12

1 Einleitung

Der nach seinem Erfinder NIKOLAUS AUGUST OTTO benannte Ottomotor wird heute vor allem in Kraftfahrzeugen eingesetzt. Dabei gibt es diverse Ausführungen, die sich in Anzahl und Struktur der Zylinder, sowie der Größe des Hubraums unterscheiden. Zur Leistungssteigerung kommen auch immer häufiger aufgeladene Ottomotoren zum Einsatz. Gängig sind hier Turbolader oder Kompressoren.

Durch viele Detailverbesserungen des Ottomotors in den letzten Jahrzehnten wurde der Verbrauch - bei gleicher Leistung - deutlich reduziert. Das Prinzip des Ottomotors hat sich dabei jedoch seit seiner Erfindung um ca. 1860 nicht grundlegend verändert.

Im folgenden soll zunächst der prinzipielle Aufbau, sowie Funktionsweise des Ottomotors betrachtet werden. Im Hauptteil geht es dann um die Berechnung des Drucks und der Temperatur während des Arbeitstaktes und die Aufstellung der dazu nötigen Differentialgleichung.

2 Ottomotor

Ottomotoren lassen sich als Zwei- oder Viertaktversion realisieren. Beim Zweitaktmotor gibt es einen Arbeitstakt, bei dem die Verbrennung stattfindet. Der zweite Schritt dient dem gleichzeitigen Ausstoß der verbrannten Gase und dem Ansaugen des neuen Luft-Treibstoff-Gemischs. Dabei kommt es jedoch zu sogenannten Spülverlusten.

Dies verringert die Effizienz des Zweitaktmotors, so dass dieser nur dann zum Einsatz kommt, wenn der Verbrauch keine große Rolle spielt. Dies ist zum Beispiel bei Ultraleichtflugzeugen der Fall, da hier das Gewicht ausschlaggebend ist. Der Zweitaktmotor ist auf Grund seines einfacheren Aufbaus mit weniger mechanischen Teilen leichter als die Viertaktversion.

Im folgenden wird die Viertakt-Ausführung näher erläutert.

2.1 Aufbau

Über das Einlassventil (1) gelangt das Benzin-Luft-Gemisch in den Brennraum. Dieses wird von der Zündkerze (2) gezündet. (3) ist das Auslassventil. Der Kolben (5) dichtet mit Hilfe der Kolbenringe den Brennraum ab. Die bei der Explosion entstehende Kraft wird über die Pleuelstange (6) auf die Kurbelwelle (7) übertragen.

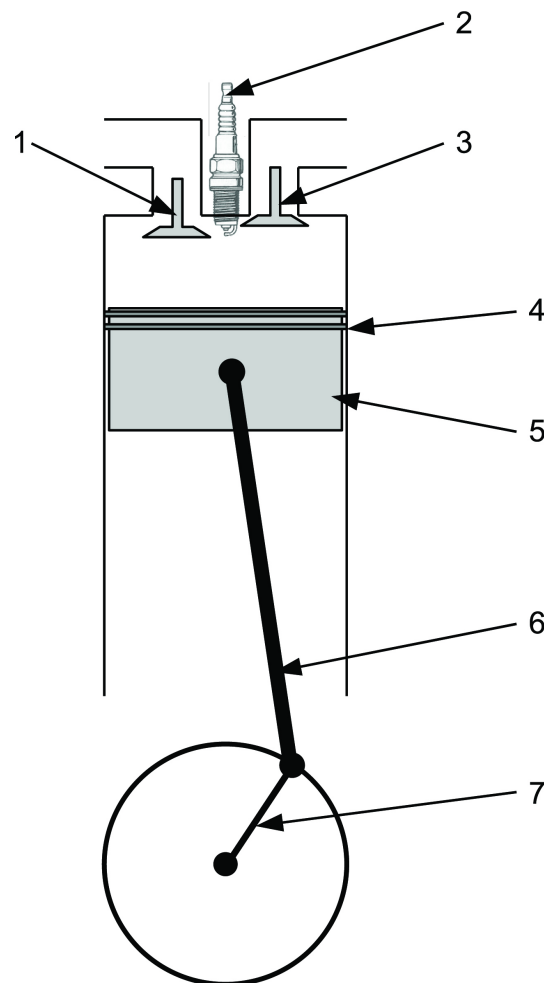


Abb. 1: Zylinderaufbau

2.2 Funktionsweise

1. Takt: Ansaugen

Bei geöffnetem Einlassventil bewegt sich der Kolben in Richtung Pleuellager. Durch einen sich bildenden Unterdruck wird das Benzin-Luft-Gemisch angesaugt.

2. Takt: Verdichten und Zünden

Nach Erreichen des unteren Totpunkts (UT) bewegt sich der Kolben wieder nach oben und verdichtet das Gemisch. Kurz vor Erreichen des oberen Totpunkts (OT) wird das Gemisch entzündet. Der Druck steigt sprunghaft an und treibt den Kolben wieder nach unten.

3. Takt: Arbeiten

Die Kraft wird auf die Kurbelwelle übertragen. Dabei nehmen im Brennraum Druck und Temperatur wieder ab.

4. Takt: Ausstoßen

Am unteren Totpunkt wird das Auslassventil geöffnet. Der Kolben stößt die verbrannten Gase aus. Am oberen Totpunkt schließt das Auslassventil. Der Zyklus beginnt von vorn.

3 Aufstellen der Differentialgleichung

Für eine Drehzahl von 4000 min^{-1} soll der Verdichtungs- und Arbeitstakt unter Vollast berechnet werden. Unter Annahme der folgenden Vereinfachungen wird eine Differentialgleichung für den Druck, sowie die Temperatur hergeleitet.

Es wird angenommen, dass:

- der Brennstoff vollständig umgesetzt wird,
- keine Leckverluste auftreten,
- der Wärmetransportkoeffizient α_w konstant bleibt,
- die spezifische Wärmekapazität c_v konstant bleibt,
- die Wandtemperatur T_w konstant bleibt,
- die Gastemperatur T im Zylinder räumlich konstant ist,
- keine Reibung vorhanden ist.

3.1 Zugeführte Wärmemenge

Bei einem vorgegebenen (oder gemessenen) Benzinmassenstrom $B = 0,0722 \frac{\text{g}}{\text{s}}$ ergibt sich mit Hilfe des Heizwertes H_u die über den Brennstoff zugeführte Leistung P_B als Produkt aus B und H_u .

$$P_b = B \cdot H_u = 0,0722 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{s}} \cdot 42 \cdot 10^6 \frac{\text{J}}{\text{kg}} = 3,033 \text{kW} \quad (1)$$

Da es bei einem Viertakter nur bei jeder zweiten Umdrehung zu einer Verbrennung kommt, ist die Wärmemenge Q_B :

$$Q_B = 2 \cdot P_B \cdot T = 0,03 \text{s} \cdot 3,033 \text{kW} = 91 \text{J} \quad (2)$$

Dabei ist $T = \frac{1}{n} = \frac{60 \text{s}}{4000} = 0,015 \text{s}$.

3.2 Modell des Brennverlaufs

Für die Modellierung des Brennverlaufs geht man davon aus, dass der Kraftstoff exponentiell in Wärmeenergie umgesetzt wird. Dieses Model entspricht dem Vibe-Brennverlauf, der folgender Gesetzmäßigkeit genügt:

$$Q_B = Q_{Bges} \left(1 - e^{-a \cdot \left(\frac{\varphi}{\varphi_{bd}} \right)^{f+1}} \right) \quad (3)$$

Dabei ist φ der Kurbelwinkel, φ_{bd} die Brenndauer, a der Faktor für den Umsetzungsgrad und f der Formparameter. Differenziert man (3) nach dem Kurbelwinkel φ , so erhält man:

$$\frac{dQ_B}{d\varphi} = -Q_{ges} \cdot a \cdot (f + 1) \cdot \left(\frac{\varphi^f}{\varphi_{bd}^{f+1}} \right) \cdot e^{-a \cdot \left(\frac{\varphi}{\varphi_{bd}} \right)^{f+1}} \quad (4)$$

Der Formparameter ist ausschlaggebend für die Zündverzögerung, wie man in den folgenden Plots leicht erkennen kann. Dabei ist $\frac{\varphi}{\varphi_{bd}}$ der Kurbelwinkel geteilt durch die Brenndauer

$$\varphi_{bd} = \frac{\pi}{3}.$$

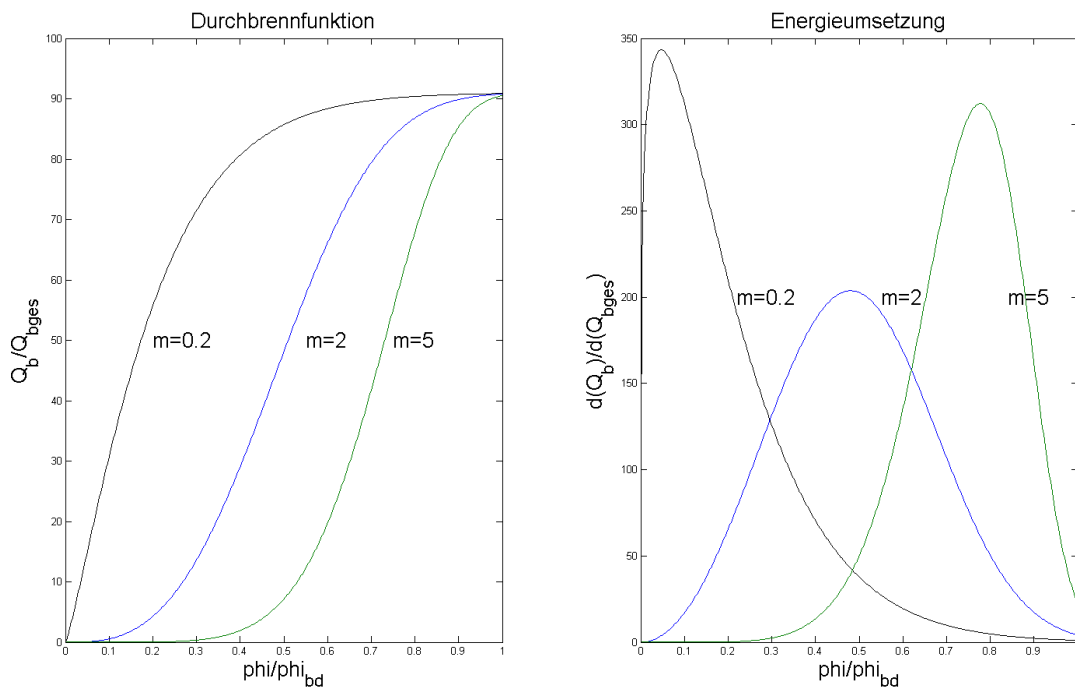


Abb. 2: Vibe Brennverlauf

3.3 Differenzialgleichungen für Temperatur T und Druck p

3.3.1 Wandfläche des Zylinders

Die Wandfläche A des Zylinders genügt folgender Gleichung

$$A(\varphi) = 2 \cdot \pi \cdot \frac{d^2}{4} + \pi \cdot d \cdot s(\varphi) \quad (5)$$

$s(\varphi)$ ergibt sich nach Betrachtung der Kurbelgeometrie

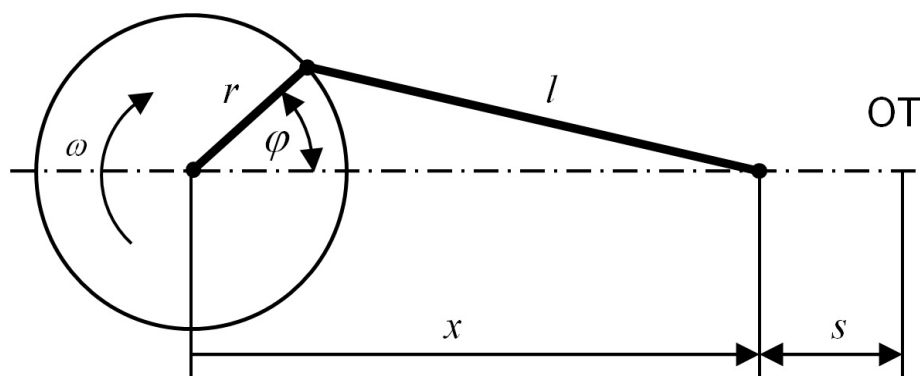


Abb. 3: Kurbelgeometrie (aus [1])

$$\begin{aligned} s(\varphi) &= r + l - x(\varphi) \\ x(\varphi) &= r \cdot \left(\cos(\varphi) + \frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{4} \cdot \cos(2\varphi) \right) \end{aligned} \quad (6)$$

3.3.2 Volumen des Zylinders

Mit einer analogen Betrachtung erhält man das Hubvolumen V des Zylinders:

$$V(\varphi) = V_c + \pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot s(\varphi) \quad (7)$$

3.3.3 Herleitung

Die Differenzialgleichungen werden auf Basis der zeitlichen Ableitung eines Energieerhaltungssatzes - dem 1. Hauptsatz der Thermodynamik - hergeleitet. Hier für den Spezialfall eines abgeschlossenen Systems und nach der Zeit differenziert:

$$\Delta\dot{U} = \dot{Q} + \dot{W} \quad (8)$$

Gleichung (8) bedeutet, dass sich die Änderung der inneren Energie U eines Systems aus der Wärmemenge Q und der mechanischen Arbeit W zusammensetzt. Unter Δ versteht man die Differenz eines Zustands mit einem früheren Zustand.

Betrachten wir nun die während des Prozesses beteiligte Wärme:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_B - \dot{Q}_{ab} \quad (9)$$

Dabei ist \dot{Q}_B die durch die Verbrennung zugeführte Wärme und \dot{Q}_{ab} die an die Umgebung abgegebene Wärme. In unserem Fall ist dies diejenige Wärmemenge, die an Zylinderwand und Kolben abgegeben wird. Diese berechnet sich nach dem Fourierschen Gesetz zu:

$$\dot{Q}_{ab} = \alpha \cdot A \cdot (T - T_w) \quad (10)$$

Der Wärmeübergangskoeffizient α ist eine vom Material abhängige Konstante - hier ist dies das Material aus dem der Motorblock gefertigt wurde. T ist die Temperatur des Arbeitsgases und T_w die Wandtemperatur. Zusätzlich geht die Fläche A mit ein, die vom Kurbelwinkel φ abhängt. Diese wurde in Abschnitt (3.3.1) hergeleitet.

Nun wird noch ein Ausdruck für die Arbeit W gesucht.

$$\text{Arbeit} = \text{Kraft} \cdot \text{Weg} = F \cdot \Delta s = p \cdot A \cdot \Delta s = p \cdot A \cdot \frac{\Delta V}{A} = p \cdot \Delta V \quad (11)$$

Schreibt man (11) differentiell und leitet nach der Zeit ab, so ergibt sich:

$$\frac{dW}{dt} = -p \cdot \frac{dV}{dt} \quad (12)$$

Hier wird das Zylindervolumen V benötigt, welches wie die Wandfläche A vom Kurbelwinkel φ abhängt. Das Zylindervolumen $V(\varphi)$ wurde in Abschnitt (3.3.2) berechnet.

Für die innere Energie gilt mit der spezifischen Wärmekapazität c_v und der Masse m des Arbeitsgases:

$$\Delta\dot{U} = c_v \cdot m \cdot \dot{T} \quad (13)$$

Mit der idealen Gasgleichung

$$p = \frac{m \cdot R \cdot T}{V} \quad (14)$$

und den Formeln (9),(10), (12), (13) erhält man durch Einsetzen in (8) die Differentialgleichung:

$$\frac{dQ_B}{dt} - \alpha \cdot A(\varphi) \cdot (T - T_w) - p \cdot \frac{dV(\varphi)}{dt} = c_v \cdot m \cdot \frac{dT}{dt} \quad (15)$$

Setzt man noch (4), (5), (7) ein, so erhält man zwei Differentialgleichungen für den Druck p und die Temperatur T .

Zuerst benötigt man jedoch noch den Kurbelwinkel φ , der sich aus der Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{n \cdot 2\pi}{60} = \frac{400}{3}\pi$ per Integration mit Anfangsbedingung π ergibt: $\varphi = \frac{400}{3}\pi \cdot t - \pi$. Somit ergibt sich für die Temperatur:

$$\frac{dT}{d\varphi} = \frac{1}{c_v \cdot m} \cdot \left(\frac{dQ_B}{d\varphi} - \alpha \cdot A(\varphi) \cdot (T - T_w) - \frac{m \cdot R \cdot T}{V(\varphi)} \cdot \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} \right) \quad (16)$$

mit Anfangsbedingung $T(0) = 300K$. Für den Druck erhält man mit Anfangsbedingung $p(0) = 1bar$:

$$\frac{dp}{d\varphi} = \frac{R}{c_v \cdot V} \cdot \left(\frac{dQ_B}{d\varphi} - \alpha \cdot A(\varphi) \cdot \left(\frac{p \cdot V}{m \cdot R} - T_w \right) - p \cdot \frac{dV}{d\varphi} \cdot \left(1 + \frac{c_v}{R} \right) \right)$$

Damit hat man die notwendigen Gleichungen, Verläufe für Temperatur und Druck zu berechnen bzw. zu plotten, was im Folgenden Kapitel mit Hilfe von Matlab realisiert wird.

4 Numerische Berechnung

Bei der Eingabe der Differentialgleichungen in Matlab muss beachtet werden, dass die Brennfunktion nur im Bereich 30° vor bis 30° nach oberem Totpunkt (OT) einen Beitrag liefert. Dies wurde mittels eines Filters realisiert, der im genannten Bereich eine 1 liefert und ausserhalb eine 0.

4.1 Temperaturverlauf

Den Temperaturverlauf bekommt man mit der folgenden Funktion mit Hilfe von Matlab:

```

function dy = ottoT(t,y)

%Vorgegebene Zahlenwerte:
Qges=91; dphiB=60*pi/180; a=6.91; m=5; d=39e-3; r=13e-3; l=52e-3;
lam=0.25; Vc=(5.15)*1e-6; cp=1050; R=287; alphaW=300; cv=cp-R;
mL=3.95e-5; n=4000; TW=300; Hu=41e6;

%Funktionen:
u = 400/3*pi*t-pi;
L = 400/3*pi*t-pi-11*pi/6;
s = r+l-r*(cos(u)+1/lam-lam/4+(lam/4)*cos(2*u));
V = Vc+pi*(d^2)/4*s;
A = 2*pi*(d^2)/4+pi*d*s;

%Ableitung der Funktionen V und Q nach dem Winkel phi(hier t!)
Qabl = -(Qges*exp(-a*((u-pi/6)/dphiB)^(m+1))*a*(m+1)*((u-pi/6)^m)
/(dphiB^(m+1))*400/3*pi);
Vabl = pi*(d^2)/4*(r*sin(u)*400/3*pi+r*lam/4*sin(2*u)*2*400/3*pi);

%Summationsteile:
S1 = Qabl;
S2 = alphaW*A*(y(1)-TW);
S3 = Vabl*mL*R*y(1)/V;

%Differentialgleichung mit y=T (Temperatur) und u=phi (Winkel):
dy(1) = (1/(cv*mL))*(S1*filter(t)-S2-S3);

function value = filter(x)
if x>= 0.006 && x < 0.00825
    value = 1;
else
    value = 0;
end

```

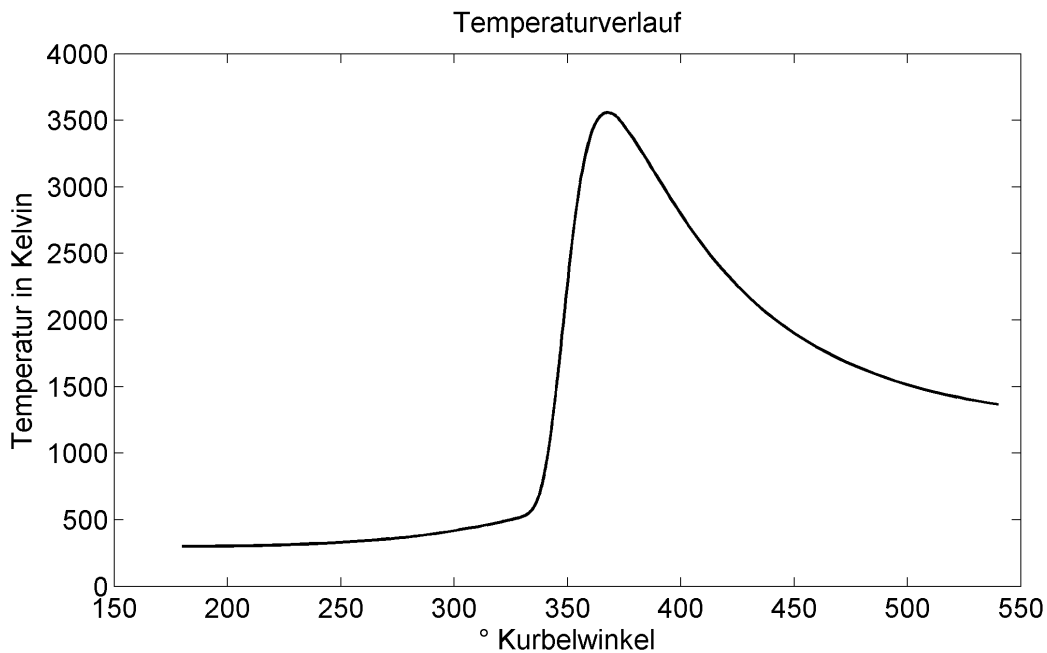


Abb. 4: Temperaturverlauf

4.2 Druckverlauf

Folgende Funktion liefert den Druckverlauf:

```
function dy = ottop(t,y)
```

```
%Vorgegebene Zahlenwerte:
```

```
Qges=91; dphiB=60*pi/180; a=6.91; m=5; d=39e-3; r=13e-3; l=52e-3;
lam=0.25; Vc=(5.15)*1e-6; cp=1050; R=287; alphaW=300; cv=cp-R;
mL=3.95e-5; n=4000; TW=300; Hu=41e6;
```

```
%Funktionen:
```

```
u = 400/3*pi*t-pi;
s = r+l-r*(cos(u)+1/lam-lam/4+(lam/4)*cos(2*u));
V = Vc+pi*(d^2)/4*s;
A = 2*pi*(d^2)/4+pi*d*s;
```

```
%Ableitung der Funktionen V und Q nach dem Winkel phi(hier t!)
```

```
Qabl = -(Qges*exp(-a*((u-pi/6)/dphiB)^(m+1))*a*(m+1)*((u-pi/6)^m)
/(dphiB^(m+1))*400/3*pi);
Vabl = pi*(d^2)/4*(r*sin(u)*400/3*pi+r*lam/4*sin(2*u)*2*400/3*pi);
```

```
%Summationsteile:
```

```

S1 = Qabl;
S2 = alphaW*A*(y(1)*(V/(mL*R))-TW);
S3 = y(1)*Vabl*(1+(cv)/R);

%Differentialgleichung mit y=T (Temperatur) und u=phi (Winkel):
dy(1) = (R/(cv*V))*((S1)*filter(t)-S2-S3);

function value = filter(x)
if x>= 0.006 && x < 0.00825
    value = 1;
else
    value = 0;
end

```

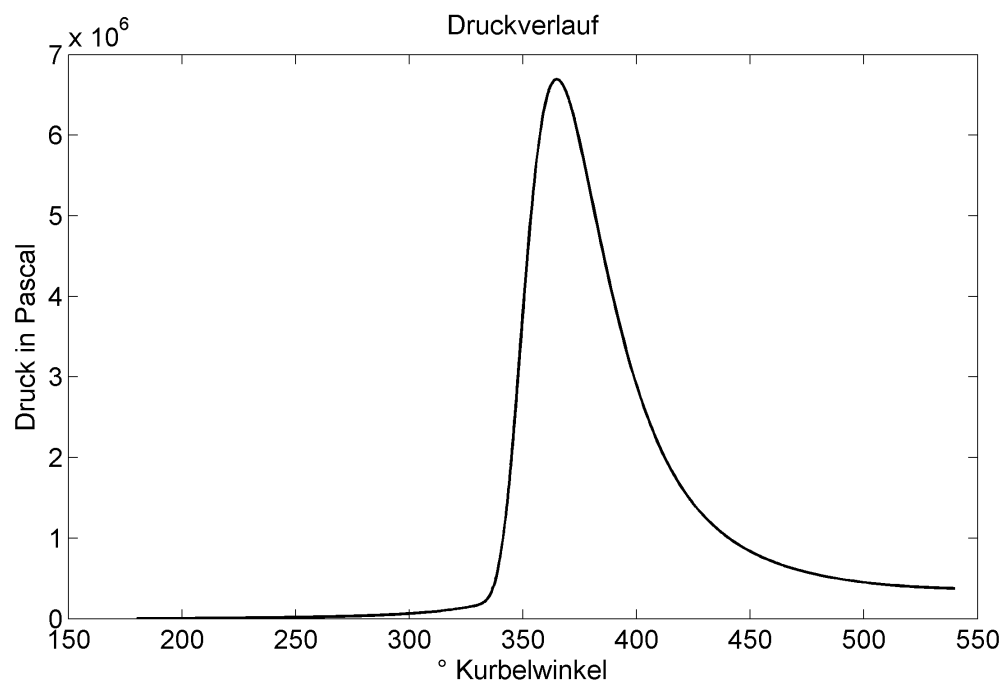


Abb. 5: Druckverlauf

4.3 p-V Diagramm

Trägt man noch den Druck über das Volumen auf, so erhält man ein p-V Diagramm. Die Fläche unter dem Graphen entspricht der verrichteten Arbeit. Der Matlab-Code ist identisch mit dem für den Druck, bis auf die Ausführung. Hier wird noch der Kurbelwinkel in das Volumen umgerechnet.

```
%Vorgegebene Zahlenwerte:
```

```

Qges=91; dphiB=60*pi/180; a=6.91; m=5; d=39e-3; r=13e-3; l=52e-3;
lam=0.25; Vc=(5.15)*1e-6; cp=1050; R=287; alphaW=300; cv=cp-R;
mL=3.95e-5; n=4000; TW=300; Hu=41e6;

```

```
figure(1)
```

```
%Optionen für DGL-Löser:
```

```
options = odeset('RelTol',1e-8,'AbsTol',[1e-8]);
```

```
[t,Y] = ode45(@topv,[0 0.015],[0], options);
```

```
V = Vc+pi*(d^2)/4*(r+l-r*(cos(400/3*pi*t-pi)+1/lam-lam/4
```

```
+(lam/4)*cos(2*(400/3*pi*t-pi)));
```

```
plot(V,Y(:,1),'-o')
```

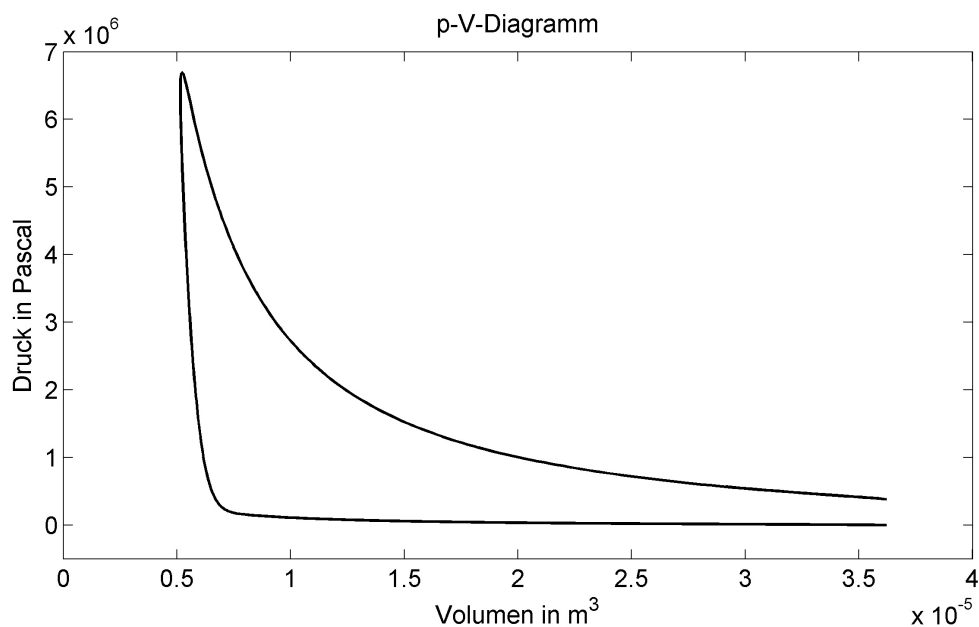


Abb. 6: p-V Diagramm

Der Vergleich mit den vorgegebenen Diagrammen zeigt, dass die Maxima hier größer sind. Dies kann daran liegen, dass eventuell nicht exakt die gleichen Größen verwendet wurden. Der Kurvenverlauf stimmt qualitativ gut mit den vorgegebenen Kurven überein.

Quellen

- [1] Helmut E. Scherf, Modellbildung und Simulation dynamischer Systeme, Auflage unbekannt
- [2] W. Demtröder, Experimentalphysik 1, Mechanik und Wärme, Axel Springer Verlag, 2006
- [3] http://techni.chemie.uni-leipzig.de/schueler/version2/start_v2/start_v2.htm 15. Jun. 2008
- [4] J. Krause, J.Grehn, Metzler Physik, Schroedel Verlag GmbH, Hannover 2004
- [5] http://de.wikipedia.org/wiki/Nikolaus_Otto, 15. Juni 08