

# Die Geschichte der Gruppendifinition

## 1 Historischer Kontext

### 1.1 18. Jahrhundert

Das 18. Jahrhundert war in philosophischer Hinsicht geprägt von der Aufklärung mit der Grundidee: „Die Vernunft ist im Stande, die Wahrheit ans Licht zu bringen.“ Kant beschreibt es wie folgt: „Habe Mut, dich deines eigenen Verstandes zu bedienen.“ Mit der Französischen Revolution (1789 - 1799) kam es in großen Teilen Europas zu einer Verbreitung der Werte und Ideen der Aufklärung.

### 1.2 19. Jahrhundert

Vor dem 18. Jahrhundert war der Wissenschaftsbetrieb vor allem auf kirchliche und landesherrliche Institutionen beschränkt - mit den Fächern Theologie, Rechtswissenschaft, Medizin und Philosophie. Dies wandelte sich im 18. und vor allem 19. Jahrhundert:

- Die Naturwissenschaften gelangten zu praktischen neuen Erkenntnissen (z. B. Navigation bei der Seefahrt, Zeitmessung, ...).
- Diese Erkenntnisse wurden von den Ingenieurwissenschaften umgesetzt.
- Die Geisteswissenschaften trugen dazu bei, die neuen gesellschaftlichen Spannungen zu diskutieren und neue politische Systeme zu etablieren.
- Auch die Mathematik erlebte durch viele Praxisfragen einen Aufschwung.

## 2 Frühe Beispiele von Gruppen

### 2.1 Permutationsgruppen

In der Algebra beschäftigte man sich um 1800 vor allem mit der Lösung von Polynomgleichungen. Auch Lagrange widmete sich 1770 diesem Problem und war damit der Erste, der die Lösungen einer Polynomgleichung mit den Permutationen ihrer Wurzeln in Verbindung brachte.

Wichtige Arbeiten zu Permutationen kamen 1815 und 1844 von Cauchy („Exercices d’analyse et de physique mathématique“), wobei er sich vor allem damit auseinandersetzte, wie viele Werte eine Funktion annehmen kann, wenn man die vorkommenden Variablen permutiert. Erst jedoch seine zweite Arbeit von 1844 fand weitere Beachtung unter den Mathematikern.

Er führte viele Schreibweisen ein, die noch heute gebräuchlich sind - zweizeilige Schreibweise für Permutationen, Zyklenschreibweise, Potenzschreibweise - und definierte die Ordnung einer Permutation  $P$  als die kleinste Zahl  $n$ , so dass  $P^n = Id$  gilt. In der Arbeit von 1844 definierte er eine Permutationsgruppe wie folgt:

*„Gegeben seien eine oder mehrere Substitutionen [Permutationen] unter Einbeziehung einiger oder aller Elemente  $x, y, z, \dots$ , so nenne ich das Produkt dieser Substitutionen, mit sich selbst oder mit irgendeinem Anderen und in beliebiger Reihenfolge, abgeleitete Substitutionen. Die gegebenen Substitutionen, zusammen mit den abgeleiteten Substitutionen, formen - so möchte ich es bezeichnen - ein System konjugierter Substitutionen.“*

Auch Galois lieferte einen wichtigen Beitrag zur Bildung des Gruppenbegriffs, da er einen Zusammenhang zwischen der Theorie der Permutationen und der Auflösbarkeit algebraischer Gleichungen herstellte. Er ordnete einer zu untersuchenden Gleichung eine Gruppe zu, aus dessen Struktur die Auflösbarkeit in Radikalen abgelesen werden konnte:

*„Sei eine Gleichung mit den Wurzeln  $a, b, c \dots$  ( $m$  Stück) gegeben, Dann gibt es immer eine Permutation der Buchstaben  $a, b, c \dots$  mit der folgenden Eigenschaft: (1) Jede Funktion dieser Wurzeln, die unter den Permutationen der Gruppe invariant bleibt, ist rational darstellbar; (2) umgekehrt ist jede rationale Funktion der Wurzeln invariant unter diesen Permutationen.“*

Interessant ist, dass Galois' Arbeiten von 1830 erst nach seinem Tod 1846 durch Liouville bekannt wurden. Der Grund hierfür ist wohl vor allem darin zu sehen, dass sich seine Arbeiten stark von denen zur gleichen Zeit unterschieden und kaum verstanden wurden.

## 2.2 Transformationsgruppen

Um 1870 konkurrierten im Bereich der Geometrie die euklidische, projektive und nichteuklidische Geometrie. Im Jahr 1872 beschäftigte sich Felix Klein im Erlanger Programm mit der Frage, was Geometrie überhaupt sei. Nach ihm sollte man *„jede Geometrie als einen Raum zusammen mit einer Gruppe von Transformationen auffassen, die die wesentlichen Eigenschaften der Figuren dieses Raumes unverändert lassen.“* Er gehörte damit zu den ersten, die die Gruppentheorie auf die Geometrie anzuwenden versuchten. Er definierte eine Gruppe wie folgt:

*„Beliebig viele Transformationen eines Raumes ergeben zusammengesetzt immer wieder eine Transformation. Hat nun eine gegebene Reihe von Transformationen die Eigenschaft, dass jede Änderung, die aus den ihr angehörigen durch Zusammensetzung hervorgeht, ihr selbst wieder angehört, so soll die Reihe eine Transformationsgruppe genannt werden.“*

Auch seine Definition war noch wenig abstrakt und konnte nur im Bereich der Geometrie angewendet werden.

### 2.3 Abelsche Gruppen

Der Ursprung für abelsche Gruppen war die Zahlentheorie. In diesem Bereich ist Carl Friedrich Gauss' *Disquisitiones Arithmeticae* als Ausgangspunkt anzusehen. Er untersuchte Kongruenzen und gab einen Beweis für die Existenz primitiver Wurzeln modulo  $p$ . Außerdem behandelte er die Theorie der quadratischen Reste mit dem quadratischen Reziprozitätsgesetz. Gauss zeigte:

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \text{ ist zyklisch} \iff n \in \{2, 4, p^a, 2p^a \mid p \in \mathbb{P} \setminus \{2\}, a \in \mathbb{N}\}$$

Da jede zyklische Gruppe abelsch ist, hat Gauss also schon sehr früh eine abelsche Gruppe gefunden, auch wenn ihm das nicht bewusst war.

Dirichlet trat 1855 in Göttingen die Nachfolge von Gauss an und machte in seinen Vorlesungen die *Disquisitiones* einer mathematischen Allgemeinheit zugänglich. Daneben definierte er in seinen Arbeiten Einheiten in algebraischen Zahlkörpern und ermittelte die Struktur der Einheitengruppe.

## 3 Entwicklung des abstrakten Gruppenbegriffs

Ursprung	Anwendung
Klassische Algebra (1770)	$\implies$ Permutationsgruppen
Zahlentheorie (1801)	$\implies$ Abelsche Gruppen
Geometrie (1872)	$\implies$ Transformationsgruppen

### 3.1 Cayley

Arthur Cayley formulierte 1854 die erste abstrakte Definition einer Gruppe, wobei er nur den endlichen Fall umfasste:

*„Eine Menge von lauter verschiedenen Symbolen  $1, \alpha, \beta, \dots$  heißt Gruppe, wenn das Produkt von zwei beliebigen Symbolen (gleich welcher Reihenfolge) und das Produkt eines Symbols mit sich selbst wieder zu der Menge gehört.“*

Für den endlichen Fall ist es nicht notwendig die Existenz des inversen Elements zu jedem Element zu fordern. Zusätzlich gab Cayley einige konkrete Beispiele, auf die sich seine Definition anwenden lässt:

- invertierbare Matrizen (unter Multiplikation);
- Permutationen;
- ...

Wichtig in diesem Zusammenhang ist auch Cayleys Theorem: „*Jede Gruppe ist isomorph zu einer Permutationsgruppe*“, wobei er den Begriff isomorph nicht explizit verwendete. Seine Abhandlung blieb 20 Jahre lang unbemerkt und erst als er 1878 nochmals darauf einging, erkannten viele dessen Bedeutung. In der Folge entstanden diverse Arbeiten über abstrakte Gruppentheorie. Die wichtigsten davon stammen von Weber, Kronecker und Dedekind - bezogen sich allerdings allein auf endliche Gruppen.

W. Von Dyck war 1882 der Erste, der alle Ursprünge der abstrakten Gruppentheorie verband: Algebra, Zahlentheorie, Geometrie und Analysis. Dabei gab er eine Definition, in der zum ersten Mal die Existenz der Inversen gefordert wurde, womit diese auch auf den unendlichen Fall anwendbar war.

### 3.2 Verbreitung

Um 1880 verbreitete sich der theoretische Ansatz schnell unter den Mathematikern, was vor allem auf zwei Arten geschah:

- Viele Beweise, die in einem konkreten Zusammenhang entstanden waren, wurden mit Hilfe der abstrakten Gruppentheorie nochmals bewiesen.
- Mehr und mehr Arbeiten, basierend auf der abstrakten Gruppentheorie wurden veröffentlicht.

In der Folgezeit setzte sich die abstrakte Formulierung der Gruppentheorie soweit durch, dass sich sogar ganze Bücher nur mit Gruppentheorie beschäftigten. Das erste erschien 1904 mit dem Titel „*Elements of the Theory of Abstract Groups*“ von de Séguier.

### 3.3 Heutige Bereiche

Heute gibt es unterschiedliche Bereiche, in denen Gruppentheorie eine große Rolle spielt:

- Endliche Gruppentheorie;
- Kombinatorische Gruppentheorie;
- Unendliche abelsche Gruppentheorie;
- Topologische Gruppentheorie;
- ...