Versuch 2
Gekoppelte Pendel

Sascha Hankele
sascha@hankele.com

Kathrin Alpert
kathrin.alpert@uni-ulm.de

20. Oktober 2006

durchgeführt am 09. Oktober 2006

Betreuer: Tobias Röder

Inhaltsverzeichnis

1 Theoretische Grundlagen **4**
1.1 Federpendel . . . 4
1.2 Mathematisches Pendel . . . 5
1.3 Physikalisches Pendel . . . 6
1.4 Berechnung von Trägheitsmomenten . . . 6
1.4.1 Satz von Steiner . . . 7
1.5 Gekoppelte Pendel . . . 8
1.5.1 Schwingungsdifferentialgleichung . . . 8
1.5.2 Schwingungsmoden . . . 10
1.5.3 Kopplungsgrad . . . 11

2 Versuchsbeschreibung **13**
2.1 Vorversuche . . . 13
2.1.1 Bestimmung der Federkonstanten . . . 14
2.1.2 Trägheitsmoment, Schwerpunktslänge und Periodendauer . . . 14
2.2 Gekoppelte Pendel . . . 15
2.2.1 Gleichphasige und gegenphasige Schwingung . . . 15
2.2.2 Schwebung . . . 16
2.2.3 Kopplungsgrad . . . 16

3 Versuchsauswertung **16**
3.1 Bestimmung der Federkonstanten . . . 16
3.1.1 Fehlerbetrachtung . . . 17
3.2 Bestimmung des Schwerpunktsabstands vom Drehpunkt . . . 17
3.2.1 Fehlerbetrachtung . . . 17
3.3 Bestimmung der Trägheitsmomente der Pendel . . . 18
3.3.1 Fehlerbetrachtung . . . 18
3.4 Vergleich der Pendel . . . 18
3.5 Vergleich der theoretischen Periodendauern mit den Messwerten . . . 18
3.5.1 Pendeleinstellung 18cm Kopplungslänge . . . 18
3.5.2 Pendeleinstellung 23cm Kopplungslänge . . . 19
3.5.3 Pendeleinstellung 28cm Kopplungslänge . . . 19
3.5.4 Fehlerbetrachtung . . . 19
3.6 Auswertung der Screenshots . . . 20
3.6.1 Gleichphasige Schwingung . . . 20
3.6.2 Gegenphasige Schwingung . . . 22
3.6.3 Schwebung . . . 24
3.7 Bestimmung des Kopplungsgrades . . . 25
3.7.1 Kopplungslänge 18cm . . . 26
3.7.2 Kopplungslänge 23cm . . . 26
3.7.3 Kopplungslänge 28cm . . . 26

3.7.4 Fehlerbetrachtung 26

1 Theoretische Grundlagen

Wenn auf ein schwingendes System keine äußere Kraft außer der rücktreibenden Kraft wirkt, so nennt man die Bewegungsform Schwingung, falls sie sich periodisch wiederholt. Handelt es sich dabei um einen sinusförmigen Verlauf, so liegt eine harmonische Schwingung vor. Wirkt eine dämpfende Kraft auf das schwingende System, so heißt die Schwingung gedämpfte Schwingung.

1.1 Federpendel

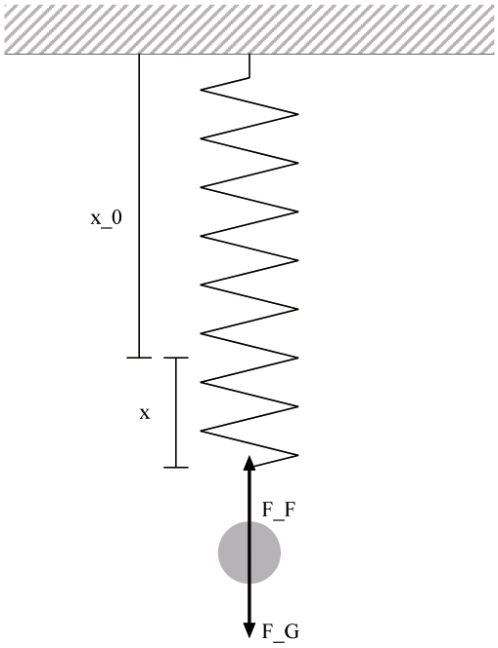

Abbildung 1: Federerpendel

Ein an einer vertikal hängenden Feder angebrachtes Massenstück dehnt die Feder um x_0 aus ihrer Ruhelage. Zusätzlich wird sie um x ausgelenkt. Es greift die nach oben gerichtete Federkraft und die nach unten gerichtete Gewichtskraft an:

$$F_F = -D(x_0 + x)$$
$$F_g = mg$$

Mit Hilfe des zweiten Newtonschen Gesetzes wird folgende Bewegungsgleichung aufgestellt:

$$F = m\ddot{x} = -D(x_0 + x) + mg$$

Befindet sich der Körper im Gleichgewicht, so gilt:

$$mg = Dx_0$$

Insgesamt erhält man die Schwingungsdifferentialgleichung des Federpendels:

$$m\ddot{x} + Dx = 0$$
$$\ddot{x} + \frac{D}{m}x = 0$$

Die Ruhelage wird also durch die Gewichtskraft nur um x_0 verschoben. Die Lösung ist eine harmonische Schwingung mit

$$\varpi = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

$$\mathrm{T} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \tag{1}$$

1.2 Mathematisches Pendel

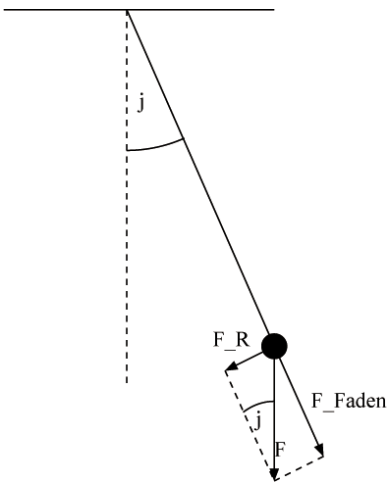

Abbildung 2: Fadenpendel

Ein mathematisches Pendel besteht aus einer punktförmigen Masse, die an einem masselosen Seil aufgehängt ist und in einer Ebene schwingt. Die Kraft auf den Faden muss nicht weiter berücksichtigt werden, da sie nur für die Seilspannung sorgt. Tangential zur Bahn gerichtet ist die Rückstellkraft F_R.

$$F_R = -mg\sin\varphi = m\ddot{x}$$
$$\frac{x}{l} = \varphi \approx \sin\varphi \qquad (\text{für } \varphi \leq 10°)$$
$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0$$

Damit erhält man die Schwingungsdauer:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

1.3 Physikalisches Pendel

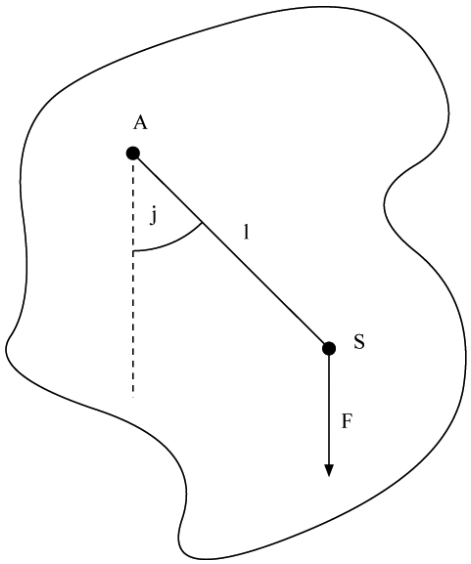

Abbildung 3: Physikalisches Pendel

Im Gegensatz zum mathematischen Pendel ist ein physikalisches Pendel ein Körper mit Ausdehnung. Der Schwerpunkt S schwingt um den sich im Abstand l befindlichen Aufhängepunkt A. Der Körper habe das Trägheitsmoment I. Nur im Fall A≠S wirkt auf den Körper ein Drehmoment $\overrightarrow{M} = \overrightarrow{l} \times m\overrightarrow{g} = l \sin\varphi mg$. Damit erhält man mit $\sin\varphi \approx \varphi$ die Differentialgleichung und Periodendauer:

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{I}\varphi = 0$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}$$

1.4 Berechnung von Trägheitsmomenten

Das Trägheitsmoment I berechnet sich bei einem starren Körper durch

$$I = \iiint\limits_V r^2 dm$$

Stab: I_{stab} für einen homogenen, langen, dünnen Stab, der um sein Ende rotiert, mit der Länge L und dem Querschnitt A:

$$I_{Stab} = \rho A \int\limits_0^L x^2 dx = \frac{m}{3}L^2$$

Hohlzylinder: I_{zyl} der um eine Achse rotiert, die zu seiner Symetrieachse senkrecht ist und durch den Schwerpunkt geht mit der Höhe h, Ausendradius R_a und Innenradius R_i:

$$I_{zyl} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{m}{4h}(R_a^2 + R_i^2)dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{m}{h} z^2 dz = \frac{m}{4}(R_a^2 + R_i^2 + \frac{h^2}{3})$$

1.4.1 Satz von Steiner

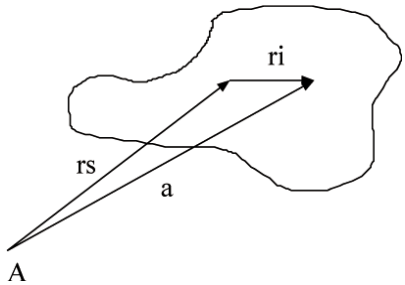

Abbildung 4: Satz von Steiner

Ist das Trägheitsmoment I_s um eine Achse durch den Schwerpunkt des Körpers bekannt, so ist es mit Hilfe des Satzes von Steiner möglich das Trägheitsmoment I_A um eine zu dieser parallelen Achse im Abstand $\overrightarrow{r_s}$ bestimmen.

$$I_A = \sum_i m_i(\overrightarrow{a_i}, \overrightarrow{a_i}) = \sum_i m_i(\overrightarrow{r_s} + \overrightarrow{r_i}, \overrightarrow{r_s} + \overrightarrow{r_i}) = \sum_i m_i(r_s^2 + 2r_s r_i + r_i^2) =$$
$$Mr_s^2 + \sum_i m_i r_i^2 + 2r_s \sum_i m_i r_i = I_s + Mr_s^2$$

1.5 Gekoppelte Pendel

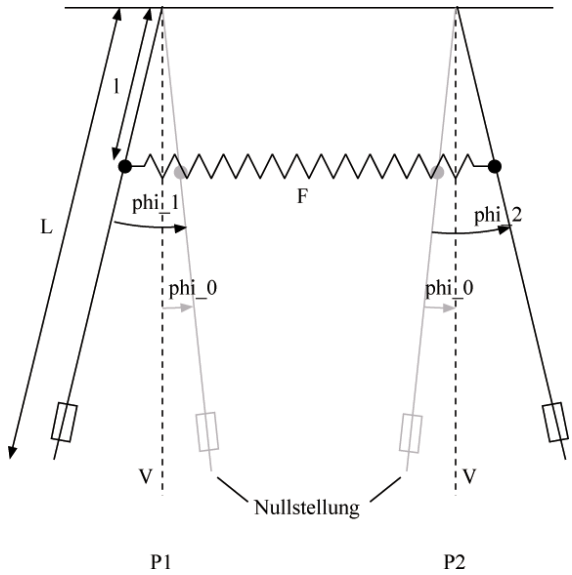

Abbildung 5: Gekoppeltes Pendel

1.5.1 Schwingungsdifferentialgleichung

Ein schwingungsfähiges System heißt gekoppelt, falls zwischen den einzelnen Systemen Kräfte wirken, die von der Auslenkung des Systems abhängen. Ein gutes Beispiel ist die Kopplung über eine Feder.

Die Ruhelage ist anders als beim entkoppelten System nicht V, sondern eine nach innen ausgelenkte Nullstellung. Es herrscht also ein Gleichgewicht der Drehmomente, das durch die Feder erzeugt wird. Dem entgegengerichtet ist die Schwerkraft.

$$M_{F,0} = -D_F x_0 L$$
$$M_{S,0} = mgL_s\phi_0$$

Wird P_2 bei festem P_1 um den Winkel ϕ_2 ausgelenkt, so wirkt ein Drehmoment:

$$M_2 = -mgL_s(\phi_2 - \phi_0) - D_F L(x_0 + L\phi_2) = -mgL_s\phi_2 - D_F L^2\phi_2$$

Wird P_1 um den Winkel ϕ_1 und P_2 um den Winkel ϕ_2 ausgelenkt, so wirkt nun das Drehmoment auf P_2:

$$M_2 = -mgL_s\phi_2 - D_F L^2\phi_2 + D_F L^2\phi_1 = -mgL_s\phi_2 - D_F L^2(\phi_2 - \phi_1)$$

und auf P_1:

$$M_1 = -mgL_s\phi_1 + D_F L^2(\phi_2 - \phi_1)$$

Durch die Drehmomente M_1 und M_2 entsteht eine Winkelbeschleunigung $\ddot{\phi}_1 = \frac{M_1}{I}$ und $\ddot{\phi} = \frac{M_2}{I}$. Dabei ist I das Trägheitsmoment der Pendel. Damit folgen die gekoppelten Differentialgleichungen:

$$\ddot{\phi}_1 = \frac{-mgL_s}{I}\phi_1 + \frac{D_F L^2}{I}(\phi_2 - \phi_1)$$
$$\ddot{\phi}_2 = \frac{-mgL_s}{I}\phi_2 - \frac{D_F L^2}{I}(\phi_2 - \phi_1)$$

Zur Vereinfachung der Rechnung kürzt man die beiden Differentialgleichungen mit $\omega_0^2 = \frac{mgL_s}{I}$ und $\Omega^2 = \frac{D_F L^2}{I}$ ab:

$$\ddot{\phi}_1 + \omega_0^2\phi_1 = -\Omega^2(\phi_1 - \phi_2)$$
$$\ddot{\phi}_2 + \omega_0^2\phi_2 = -\Omega^2(\phi_2 - \phi_1)$$

Durch Subtraktion und Addition obiger Gleichungen erhält man zwei Differentialgleichungen, die nun voneinander entkoppelt sind.

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\phi_1 - \phi_2) + \omega_0^2(\phi_1 - \phi_2) = -2\Omega^2(\phi_1 - \phi_2)$$
$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\phi_1 + \phi_2) + \omega_0^2(\phi_1 + \phi_2) = 0$$

Nach einsetzen der Normalkoordinaten mit $\omega_1^2 = (\omega_0^2 + 2\Omega^2)$ erhält man:

$$\ddot{y}_1 + \omega_1^2 y_1 = 0$$
$$\ddot{y}_2 + \omega_0^2 y_2 = 0$$

Es gilt für die Schwingungsgleichung des harmonischen Oszillators:

$$y_1(t) = a_1 \cos\omega_1 t + b_1 \sin\omega_1 t$$
$$y_2(t) = a_2 \cos\omega_0 t + b_2 \sin\omega_0 t$$

Rücktransformation liefert:

$$\phi_1(t) = \frac{y_2 + y_1}{2} = \frac{1}{2}(a_1 \cos\omega_1 t + b_1 \sin\omega_1 t + a_2 \cos\omega_0 t + b_2 \sin\omega_0 t) \quad (2)$$
$$\phi_2(t) = \frac{y_2 - y_1}{2} = \frac{1}{2}(-a_1 \cos\omega_1 t - b_1 \sin\omega_1 t + a_2 \cos\omega_0 t + b_2 \sin\omega_0 t) \quad (3)$$

1.5.2 Schwingungsmoden

Für die Lösung werden Anfangsbedingungen benötigt. Sie werden so gewählt, dass die Anfangsgeschwindigkeit Null ist, d.h.

$$\dot{\phi}_1(0) = \dot{\phi}_2(0) = 0$$

Werden diese Anfangsbedingungen in die Gleichungen (2) und (3) eingesetzt, so gilt $b_1 = b_2 = 0$. Um die Konstanten a_1 und a_2 bestimmen zu können wird zwischen drei Fällen - drei unterschiedlichen Schwingungsmoden - unterschieden.

Gleichphasige Schwingung ($\phi_1(0) = \phi_2(0) = \phi_0$) Werden beide Pendel in gleiche Richtung und um den gleichen Winkel ausgelenkt, so erhält man eine gleichphasige Schwingung, falls beide zum Zeitpunkt t=0 losgelassen werden.

Durch Einsetzen dieser Anfangsbedingungen in (2) und (3) bekommt man:

$$\begin{aligned} \phi_1(0) = \phi_0 = \tfrac{1}{2}(a_2 + a_1) \\ \phi_2(0) = \phi_0 = \tfrac{1}{2}(a_2 - a_1) \end{aligned}$$

mit einer Schwingungsgleichung:

$$\phi_1(t) = \phi_2(t) = \phi_0 \cos \omega_0 t$$

Die Pendel Schwingen also mit gleicher Amplitude, Phase und Periodendauer. Die Feder hat keine Auswirkung auf das System, d.h. es findet keine Energieübertragung statt.

Gegenphasige Schwingung($\phi_1(0) = -\phi_2(0) = \phi_0$) Werden beide Pendel um den gleichen Winkel, aber in entgegengesetzte Richtung ausgelenkt, so schwingen sie gegenphasig, falls beide zum Zeitpunkt t=0 losgelassen werden.

Durch Einsetzen dieser Anfangsbedingungen in (2) und (3) bekommt man:

$$\begin{aligned} \phi_1(0) = \phi_0 = \tfrac{1}{2}(a_2 + a_1) \\ \phi_2(0) = -\phi_0 = \tfrac{1}{2}(a_2 - a_1) \end{aligned}$$

mit Schwingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \phi_1(t) = \phi_0 \cos \omega_1 t \\ \phi_2(t) = -\phi_0 \cos \omega_1 t = \phi_0 \cos(\omega_1 t - \pi) \end{aligned}$$

Im Gegensatz zur gleichphasigen Schwingung ergibt sich eien Phasenverschiebung um π. Die stärke der Kopplung hat hier einen großen Einfluss auf die Kriesfrequenz $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2}$.

Schwebung($\phi_1(0) = \phi_0$; $\phi_2(0) = 0$) Durch Überlagerung von gegenphasiger und gleichphasiger Schwingung erhält man alle verschiedenen Schwingungsmoden. Aus diesem Grund heißen die gleich- und gegenphasige Schwingung auch Normalschwingung.

Bei der Schwebung wird nur eines der beiden Pendel ausgelenkt, während das andere in der Ruhelage festgehalten wird. Werden wieder beide Pendel gleichzeitig bei t=0 losgelassen, so ergibt sich die Schwebung.

Aus den Gleichungen (2) und (3) folgt:

$$\phi_1(0) = \phi_0 = \tfrac{1}{2}(a_2 + a_1)$$
$$\phi_2(0) = 0 = \tfrac{1}{2}(a_2 - a_1)$$

Mit Hilfe der Additionstheoreme ergeben sich die Schwingungsgleichungen:

$$\phi_1(t) = \tfrac{1}{2}\phi_0(\cos\omega_1 t + \cos\omega_0 t) = \phi_0 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_0}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_0}{2}t\right)$$
$$\phi_2(t) = \tfrac{1}{2}\phi_0(\cos\omega_1 t - \cos\omega_0 t) = -\phi_0 \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_0}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_0}{2}t\right)$$

Dies liefert auch die Kreisfrequenzen:

$$\omega_2 = \frac{(\omega_1 + \omega_0)}{2} \tag{4}$$
$$\omega_3 = \frac{(\omega_1 - \omega_0)}{2} \tag{5}$$

Deutlich zu erkennen ist dabei, dass ω_3 die Frequenz der langsamen Amplitudenfunktion ist. ω_2 ist die Frequenz für die schnelle Schwingung. Deren Amplitude hängt dabei von der langsamen Schwingung ab.

Die Phasenverschiebung um $\frac{\pi}{2}$ zeigt, dass die Energie von einem Pendel periodisch in das andere überfließt, bis ein Minimalpunkt erreicht ist, so dass das Pendel nicht mehr schwingt. Zur gleichen Zeit schwingt das andere Pendel mit maximaler Amplitude.

1.5.3 Kopplungsgrad

Der Kopplungsgrad stellt ein Maß für die Stärke der Kopplung dar. Grundsätzlich ist der Kopplungsgrad definiert als:

$$K = \frac{D_F L^2}{mgL_s + D_F L^2} = \frac{\Omega^2}{\omega_0^2 + \Omega^2} \tag{6}$$

Dabei lässt sich K mit Hilfe der Definition von Ω mit unterschiedlichen Größen auf mehrere Arten berechnen:

Aus gleichphasiger Schwingungsdauer $\mathbf{T}_0$ und gegenphasiger Schwingungungsdauer $\mathbf{T}_1$

$$K = \frac{T_0^2 - T_1^2}{T_0^2 + T_1^2}$$

Mit Größtfehler:

$$\Delta K = 4T_1T_0\frac{T_1\Delta T_0 + T_0\Delta T_1}{(T_0^2 + T_1^2)^2}$$

Aus schneller schneller Schwingungsdauer $\mathbf{T}_2$ und aus langsamer Schwingungsdauer $\mathbf{T}_3$

$$K = 2\frac{T_2T_3}{T_2^2 + T_3^2}$$

Mit Größtfehler:

$$\Delta K = \frac{2}{(T_2^2 + T_3^2)^2}(T_3|(T_3^2 - T_2^2)|\Delta T_2 + T_2|(T_2^2 - T_3^2)|\Delta T_3)$$

Aus den Pendelmaßen:

$$K = \frac{DL^2}{mgL_s + DL^2}$$

Mit Größtfehler:

$$\Delta K = \frac{gL}{(mgL_s + DL^2)^2}(mL_sL\Delta D + 2mL_sD\Delta L + L_sLD\Delta m + mDL\Delta L_s)$$

Die Periodentauern T erhält man wie folgt:

$$T_i = \frac{2\pi}{\omega_i}$$

bzw.

$$T_2 = \frac{2T_0T_1}{T_0 + T_1}$$
$$T_3 = \frac{2T_0T_1}{T_0 - T_1}$$

2 Versuchsbeschreibung

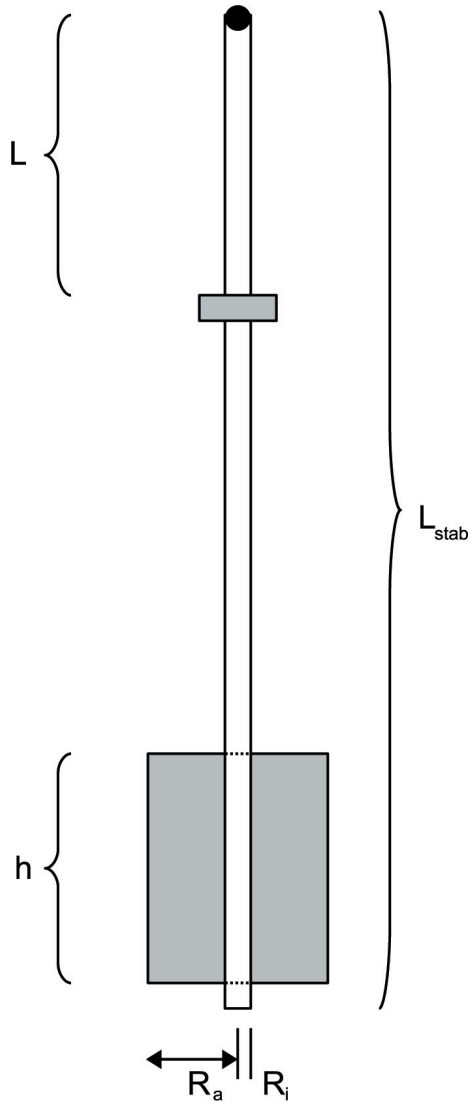

Abbildung 6: Pendelaufbau

2.1 Vorversuche

Für die spätere Auswertung ist es notwendig, die Pendel auf gleiche Periodendauer abzustimmen. Des weiteren müssen die Trägheitsmomente, Periodendauern und die Federkonstante der Kopplungsfeder bestimmt werden.

2.1.1 Bestimmung der Federkonstanten

Die Federkonstante D kann mit Hilfe bekannter Massen über die Periodendauer dynamisch bestimmt werden. Wird die vertikal angebrachte Feder ausgelenkt, so vollführt sie eine harmonische Schwingung mit Periodendauer T. Die Federkonstante ergibt sich zu:

$$D = 4\pi^2 \frac{m}{T^2} \tag{7}$$

2.1.2 Trägheitsmoment, Schwerpunktslänge und Periodendauer

Für beide Pendel werden die Abmessungen und die Massen bestimmt. Das Gewicht wird gewogen, wohingegen die Masse der Stangen über ihre Maße bestimmt wird, da diese nicht abmontiert werden kann. Mit vorgegebener Dichte und dem berechneten Volumen lässt sich so die Masse der Stangen bestimmen.

Die Trägheitsmomente erhält man mit Hilfe der im Theorieteil hergeleiteten Formeln und dem Satz von Steiner:

$$I_{Stab} = \frac{m_{\text{Stab}}}{3} L_{\text{Stab}}^2$$
$$I_{zyl} = \frac{m_{\text{Gew}}}{4}\left(R_{\text{a}}^2 + R_{\text{i}}^2 + \frac{h_{\text{Gew}}^2}{3}\right) + m_{\text{Gew}}\left(L_{\text{Stab}} - \frac{h_{\text{Gew}}}{2}\right)^2$$

Das Gesamtträgheitsmoment erhält man durch Addition der einzelnen Trägheitsmomente:

$$I_{\text{Ges}} = I_{\text{Stab}} + I_{\text{Gew}} = \frac{m_{\text{Stab}}}{3} L_{\text{Stab}}^2 + \frac{m_{\text{Gew}}}{4}\left(R_{\text{a}}^2 + R_{\text{i}}^2 + \frac{h_{\text{Gew}}^2}{3}\right) + m_{\text{Gew}}\left(L_{\text{Stab}} - \frac{h_{\text{Gew}}}{2}\right)^2$$

Der Fehler ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}\Delta I_{ges} = &\frac{1}{3} L_{Stab}^2 \Delta m_{Stab} + (\frac{1}{4}(R_{\text{a}}^2 + R_{\text{i}}^2 + \frac{h_{\text{Gew}}^2}{3}) + (L_{\text{Stab}} - \frac{h_{\text{Gew}}}{2}))\Delta m_{Gew} \\ &+(\frac{2}{3} m_{Stab} L_{Stab} + 2 m_{Gew}(L_{\text{Stab}} - \frac{h_{\text{Gew}}}{2}))\Delta L_{Stab} + \frac{1}{2} m_{Gew} R_a \Delta R_a \\ &+\frac{1}{2} m_{Gew} R_i \Delta R_i + (\frac{1}{6} m_{Gew} h_{Gew} - m_{Gew}(L_{\text{Stab}} - \frac{h_{\text{Gew}}}{2}))\Delta h_{Gew}\end{aligned}$$

Mit Hilfe der berechneten Trägheitsmomente lässt sich die Periodendauer des Pendels bestimmen (physikalisches Pendel). Der Fehler ist hier:

$$\Delta T_0 = \frac{\pi}{\sqrt{ImgL_s}}\left[\Delta I + I\left(\frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta L_s}{L_s}\right)\right]$$

Die Schwerpunktslänge lässt sich berechnen mit (a ist der Abstand vom Gewicht zur Aufhängung):

$$L_s = \frac{1}{m_{\text{Stab}} + m_{\text{Gew}}} \left(m_{\text{Stab}} \frac{L_{\text{Stab}}}{2} + m_{\text{Gew}} \left(a + \frac{h_{\text{Gew}}}{2} \right) \right)$$

mit Größtfehler:

$$\begin{aligned} \Delta L_s = & \frac{1}{2} \frac{m_{Stab}}{m_{Stab} + m_{Gew}} \Delta L_{Stab} + \frac{1}{2} \frac{m_{Gew}(-L_{Stab} + h_{Gew} + 2a)}{(m_{Stab} + m_{Gew})^2} \Delta m_{Stab} \\ & + \frac{1}{2} \frac{m_{Stab}(-L_{Stab} + h_{Gew} + 2a)}{(m_{Stab} + m_{Gew})^2} \Delta m_{Gew} + \frac{m_{Gew}}{m_{Stab} + m_{Gew}} \Delta a \\ & + \frac{1}{2} \frac{m_{Gew}}{m_{Stab} + m_{Gew}} \Delta h_{Gew} \end{aligned}$$

Die Pendel werden durch Verstellen der Massen auf gleiche Periodendauer justiert, die dann mit dem Messcomputer gemessen wird.

2.2 Gekoppelte Pendel

Mit Hilfe einer Feder werden die Pendel im Abstand L vom Aufhängepunkt gekoppelt. Die Messung wird mit drei verschiedenen Kopplungslängen durchgeführt.

2.2.1 Gleichphasige und gegenphasige Schwingung

Beide Pendel werden um die gleiche Amplitude in gleicher Richtung ausgelenkt. Da beide Pendel auf gleiche Periodendauer abgestimmt wurden, sollte die Kopplungsfeder keine Energie zwischen den Pendeln übertragen. Daher sollte die hier gemessene Periodendauer einen annähernd gleichen Wert wie die Periodendauer eines einzelnen Pendels aufweisen.

Für die gegenphasige Schwingung werden die Pendel in entgegengesetzter Richtung mit gleicher Amplitude ausgelenkt. Man vergleicht die gemessene Periodendauer mit dem theoretischen Wert:

$$T_1 = T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgL_s + 2DL^2}}$$

Mit dem Fehler:

$$\Delta T_1 = \frac{\pi}{\sqrt{I(mgL_s + 2DL^2)}} \left[\Delta I + \frac{I}{mgL_s + 2DL^2} (gL_s \Delta m + mg\Delta L_s + 2L^2 \Delta D + 4DL\Delta L) \right]$$

2.2.2 Schwebung

Bei einer Schwebung wird zu Beginn nur eines der beiden Pendel ausgelenkt, während das andere festgehalten wird. Die Schnellenperiode T_2 wird genau wie die halbe Schwebungsdauer T_3 mit Hilfe des Messcomputers aufgezeichnet.

$$T_2 = 2\frac{T_0 T_1}{T_0 + T_1}$$

$$T_3 = 2\frac{T_0 T_1}{T_0 - T_1}$$

Diese Zeiten lassen sich wiederum mit den theoretischen Werten aus dem Vorversuch vergleichen.

Die Größtfehler lassen sich mit folgenden Formeln berechnen:

$$\Delta T_2 = 2\frac{T_1^2}{(T_0 + T_1)^2}\Delta T_0 + 2\frac{T_0^2}{(T_0 + T_1)^2}\Delta T_1$$
$$\Delta T_3 = \left| -2\frac{T_1^2}{(T_0 - T_1)^2}\Delta T_0 \right| + 2\frac{T_0^2}{(T_0 - T_1)^2}\Delta T_1$$

2.2.3 Kopplungsgrad

Aus den obigen Versuchen lässt sich der Kopplungsgrad auf drei verschiedene Arten berechnen. Auch die Größtfehler sind bereits im Theorieteil angegeben.

3 Versuchsauswertung

3.1 Bestimmung der Federkonstanten

m_1/kg	T_1/s	m_2/kg	T_2/s	m_3/kg	T_3/s
$0,020$	$0,60 \pm 0,0067$	$0,030$	$0{,}71 \pm 0,0067$	$0,040$	$0{,}82 \pm 0,0067$
	$0,59 \pm 0,0067$		$0{,}72 \pm 0,0067$		$0{,}82 \pm 0,0067$
	$0{,}58 \pm 0,0067$		$0{,}72 \pm 0,0067$		$0{,}82 \pm 0,0067$
	$0,59 \pm 0,0067$		$0{,}72 \pm 0,0067$		$0{,}83 \pm 0,0067$
	$0,58 \pm 0,0067$		$0{,}72 \pm 0,0067$		$0{,}81 \pm 0,0067$
	$0{,}59 \pm 0,0067$		$0{,}72 \pm 0,0067$		$0{,}82 \pm 0,0067$

Es wurden drei Messungen mit unterschiedlichen Massestücken durchgeführt. Es ergibt sich für Federkonstanten:

$D_1/(N/m)$	$\Delta D_1/(N/m)$	$D_2/(N/m)$	$\Delta D_2/(N/m)$	$D_3/(N/m)$	$\Delta D_3/(N/m)$
2,268	0,052	2,285	0,041	2,349	0,039

Insgesamt weichen die ermittelten Federkonstanten nicht signifikant voneinander ab. Daher kann angenommen werden, dass der Hooke'sche Bereich noch nicht verlassen wurde. Gemittelt ergibt sich folgendes Gesamtresultat für die Federkonstante:

$$D = (2,301 \pm 0,044)\tfrac{N}{m}$$

3.1.1 Fehlerbetrachtung

Der Fehler wurde mit Hilfe der Fehlerfortpflanzung berechnet:

$$\Delta D = \frac{8\pi^2 m}{T^3}\Delta T$$

3.2 Bestimmung des Schwerpunktsabstands vom Drehpunkt

	Pendel 1	Pendel 2	Fehler
Stange			
l_{ges}/m	0,5095	0,509	0,001
m/kg	0,1025	0,1024	0,00364
Gewicht			
h/m	0,0503	0,0501	0,00005
d/m	0,0302	0,0301	0,00005
m/kg	0,2953	0,2951	0,0001
Abstand a	0,4475	0,4470	0,001

Der Tabelle lassen sich die Maße der Pendel entnehmen. Damit lässt sich der Schwerpunktsabstand vom Drehpunkt berechnen:

$$\mathrm{L}_{S1} = (0,4165 \pm 0,00117)m$$
$$\mathrm{L}_{S2} = (0,4160 \pm 0,00117)m$$

Die Berechnung hat gezeigt, dass der Schwerpunktsabstand für beide Pendel annähernd gleich ist.

3.2.1 Fehlerbetrachtung

Die Fehler wurden über den Größtfehler berechnet.

3.3 Bestimmung der Trägheitsmomente der Pendel

Mit den Daten aus der Tabelle lassen sich wiederum die Trägheitsmomente der Pendel bestimmen. Die Berechnung erfolgt nach den Formeln aus der Versuchsbeschreibung.

$$\mathrm{I}_{S1} = (0,07822 \pm 0,000653)kgm^2$$
$$\mathrm{I}_{S2} = (0,07799 \pm 0,000653)kgm^2$$

Auch hier sieht man, dass die Trägheitsmomente annähernd gleich sind.

3.3.1 Fehlerbetrachtung

Die Fehler wurden über den Größtfehler bererechnet.

3.4 Vergleich der Pendel

Mit Hilfe des Messcomputers wurden die Periodendauern der beiden Pendel für jeweils 5 Perioden gemessen. Für beide Pendel wurde der exakt gleiche Wert festgestellt: t=6672,7ms für 5 Perioden. Dies zeigt, dass die beiden Pendel als gleich angenommen werden können, was eine der Vorraussetzungen für unser gekoppeltes Pendel ist. Gemittelt ergibt sich ein Schwerpunktsabstand von $\mathrm{L}_s = (0,41625 \pm 0,00117)m$ und ein Trägheitsmoment von I=$(0{,}07811 \pm 0,000653)kgm^2$.

3.5 Vergleich der theoretischen Periodendauern mit den Messwerten

Zunächst wurde die Auslenkung der Pendel eingestellt. Während des Versuchs wurde immer der Wert a=$(0{,}02170 \pm 0,001)m$ verwendet.

3.5.1 Pendeleinstellung 18cm Kopplungslänge

	T_{ex}/s	$\Delta T_{ex}/s$	T_{th}/s	$\Delta\mathrm{T}_{th}/s$
gleichphasig	1,3313	0,004	1,3780	0,0155
gegenphasig	1,2766	0,004	1,3188	0,0104
Schwebung, schnell	1,3323	0,004	1,3477	0,0480
Schwebung, langsam	31,130	0,1	30,69	0,0503

Die theoretischen Periodendauern und Fehler wurden mit Hilfe der in der Versuchsbeschreibung und der Theorie hergeleiteten Formeln berechnet. Die experimentellen Werte wurden gemittelt und so die Periodendauer berechnet. Der Fehler ergibt sich aus der Ableseungenauigkeit der Periodenmaxima bzw. -minima.

3.5.2 Pendeleinstellung 23cm Kopplungslänge

	T_{ex}/s	$\Delta T_{ex}/s$	T_{th}/s	$\Delta T_{th}/s$
gleichphasig	1,3337	0,004	1,3780	0,0155
gegenphasig	1,2484	0,004	1,2850	0,0104
Schwebung, schnell	1,3272	0,004	1,3299	0,0467
Schwebung, langsam	19,587	0,1	19,0494	0,0488

Die theoretischen Periodendauern und Fehler wurden mit Hilfe der in der Versuchsbeschreibung und der Theorie hergeleiteten Formeln berechnet. Die experimentellen Werte wurden gemittelt und so die Periodendauer berechnet. Der Fehler ergibt sich aus der Ableseungenauigkeit der Periodenmaxima bzw. -minima.

3.5.3 Pendeleinstellung 28cm Kopplungslänge

	T_{ex}/s	$\Delta T_{ex}/s$	T_{th}/s	$\Delta T_{th}/s$
gleichphasig	1,3336	0,004	1,3780	0,0155
gegenphasig	1,2173	0,004	1,2465	0,0104
Schwebung, schnell	1,3265	0,004	1,3089	0,0451
Schwebung, langsam	13,818	0,1	13,0593	0,0471

Die theoretischen Periodendauern und Fehler wurden mit Hilfe der in der Versuchsbeschreibung und der Theorie hergeleiteten Formeln berechnet. Die experimentellen Werte wurden gemittelt und so die Periodendauer berechnet. Der Fehler ergibt sich aus der Ableseungenauigkeit der Periodenmaxima bzw. -minima.

3.5.4 Fehlerbetrachtung

Die Abweichungen zwischen gemessenen und theoretischen Werten bleiben nur selten im Bereich der berechneten Größtfehler oder der Messungenauigkeit. Trotzdem sind die relativen Abweichungen zwischen theoretischer Betrachtung und experimentell bestimmten Werten meist kleiner als 5%.

Der Unterschied resultiert wohl aus den in der Theorie gemachten Vereinfachungen. So wurde z.B. die Masse des verschiebbaren Gewichts nicht beachtet. Auch die Näherungen bei der Berechnung des Trägheitsmoments und des Schwerpunkts sind nicht in die Fehlerberechnung mit einbezogen worden. Insgesamt ist also anzunehmen, dass die experimentell gemessenen Werte genauer sind, als die aus der Theorie berechneten Werte.

Besonders auffällig ist die Abweichung im Fall der gleichphasigen Schwingung. Hier kommen die oben genannten Probleme besonders stark zum Tragen.

3.6 Auswertung der Screenshots

Die Screenshots wurden mit Hilfe des Messcomputers erstellt. Dabei wird die Amplitude in vertikaler Richtung und die Anzahl der Messpunkte in horizontaler Richtung angezeigt.

Der Messcomputer wurde so eingestellt, dass beide Pendel gleichzeitig mit 500 Messwerten pro Sekunde aufgezeichnet werden.

Die vertikale Verschiebung der beiden Schwingungen resultiert aus den unterschiedlichen Eingangspegeln, so dass man zwei Aufnahmen gleichzeitig gut ablesbar darstellen kann. Nicht betrachtet wurde in der Theorie die Dämpfung, die auf jedem Schaubild zu erkennen ist. Das verändert aber die Periodendauer nicht, sondern beeinflusst nur die Amplitude leicht.

3.6.1 Gleichphasige Schwingung

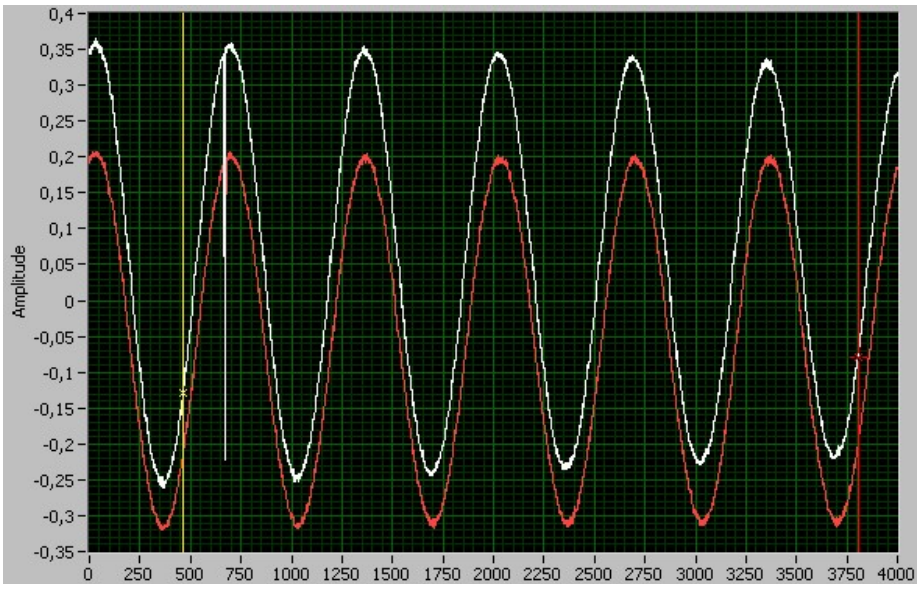

Abbildung 7: gleichphasig 18cm Kopplungslänge

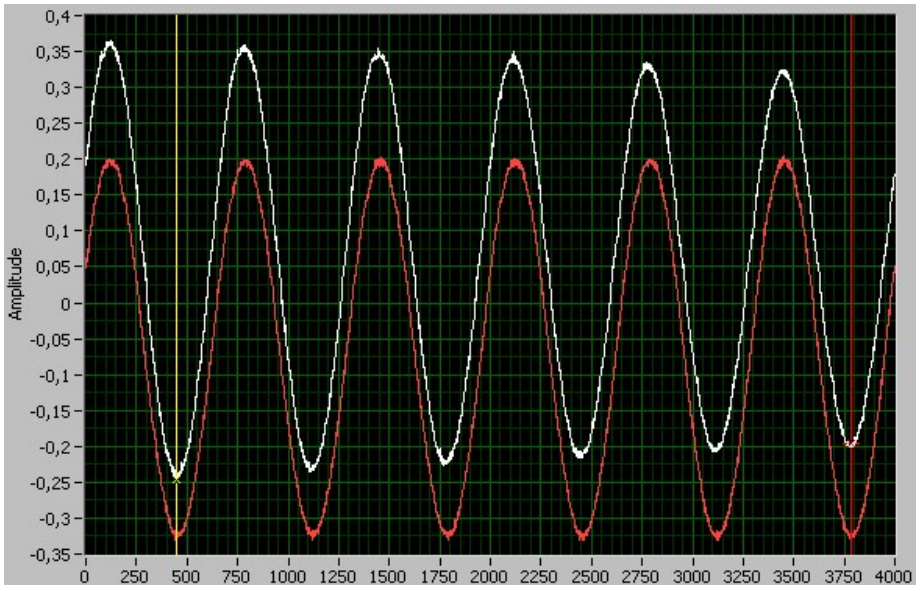

Abbildung 8: gleichphasig 23cm Kopplungslänge

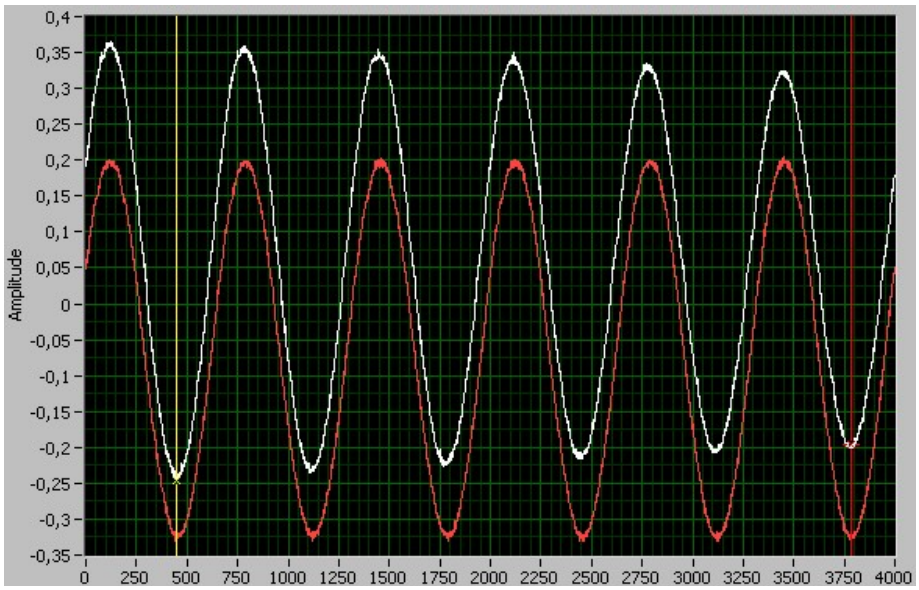

Abbildung 9: gleichphasig 28cm Kopplungslänge

Die obigen Screenshots entsprechen den aus der Theorie erwarteten Schwingungen. Die Schwingungen sind sinusförmig und weißen keine Phasenverschiebung in x-Richtung auf.

Auch die Amplituden der gekoppelten Pendel sind annähernd gleich. Die Amplituden verändern sich auch kaum. Es findet also keine Energieübertragung zwischen den einzelnen Pendeln statt.

Gut erkennbar ist, dass weder die Periodendauer noch die Amplitude von der Kopplungslänge abhängen. Dies stimmt auch mit der theoretischen Betrachtung überein, da die Kopplungslänge nicht in die Berechnung der Periodendauer einfließt.

3.6.2 Gegenphasige Schwingung

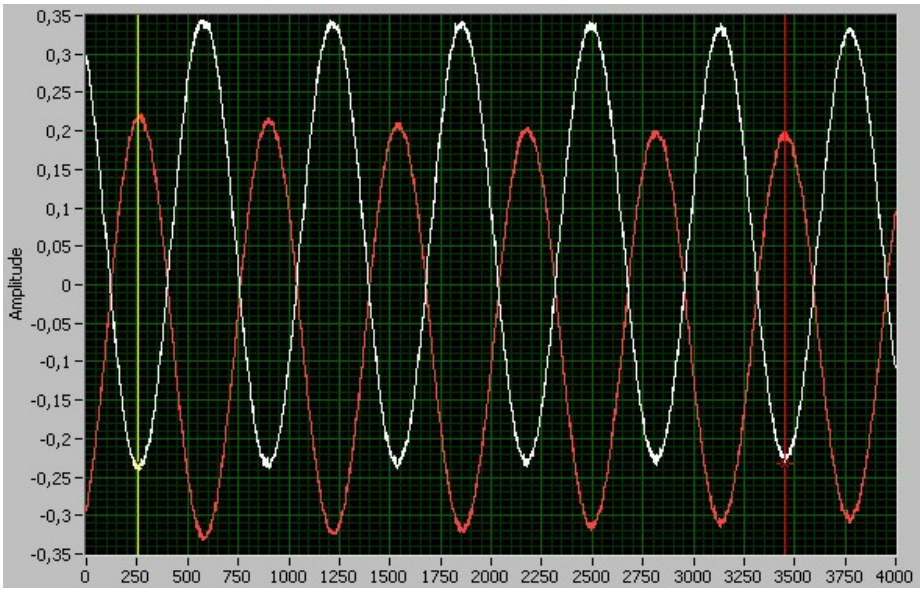

Abbildung 10: gegenphasig 18 cm Kopplungslänge

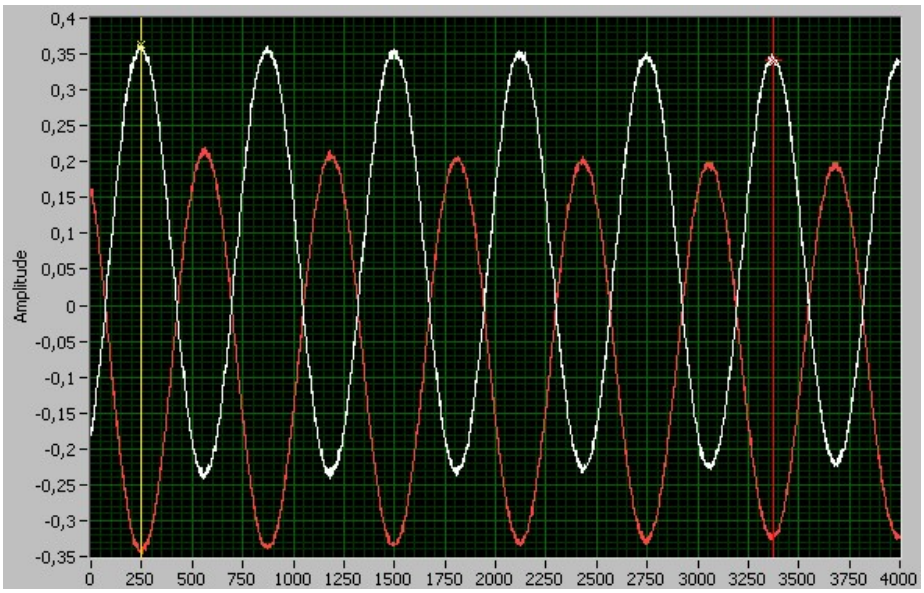

Abbildung 11: gegenphasig 23cm Kopplungslänge

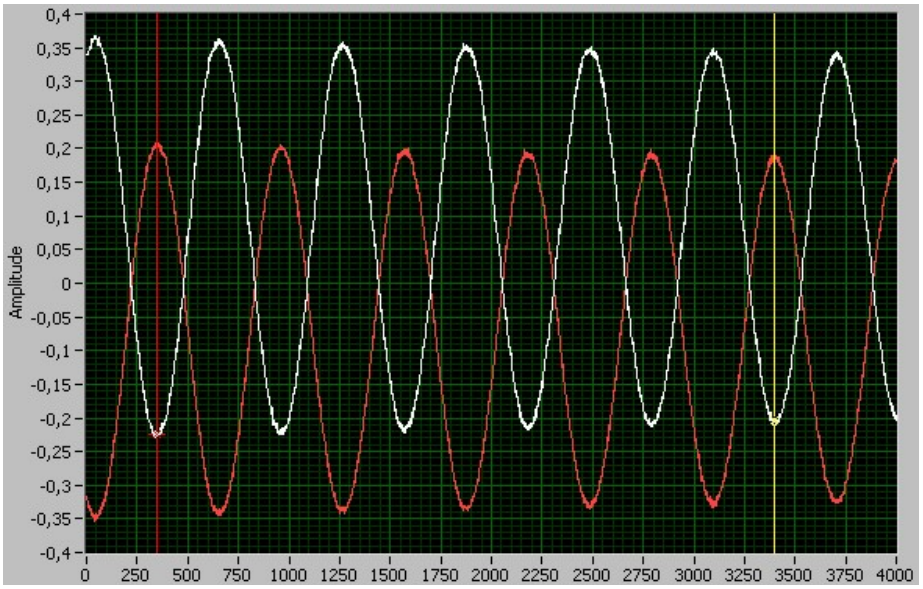

Abbildung 12: gegenphasig 28cm Kopplungslänge

Hier weisen die sinusförmigen Schwingungen eine Verschiebung in x-Richtung um eine halbe Periode auf. Dies entspricht der Phasenverschiebung um π in den im Theorieteil aufgestellten Schwingungsgleichungen.

Die Energieübertragung zwischen den Pendeln sind einander entgegengerichtet. Daher ändert sich die Amplitude nicht und es findet effektiv keine Energieübertragung zwischen beiden Pendeln statt.

Im Gegensatz zum gleichsinnigen Fall ändert sich hier jedoch die Periodendauer. Je größer die Kopplungslänge ist, desto kürzer ist die Periodendauer. Das gleiche Ergebnis erhält man durch die theoretische Betrachtung.

3.6.3 Schwebung

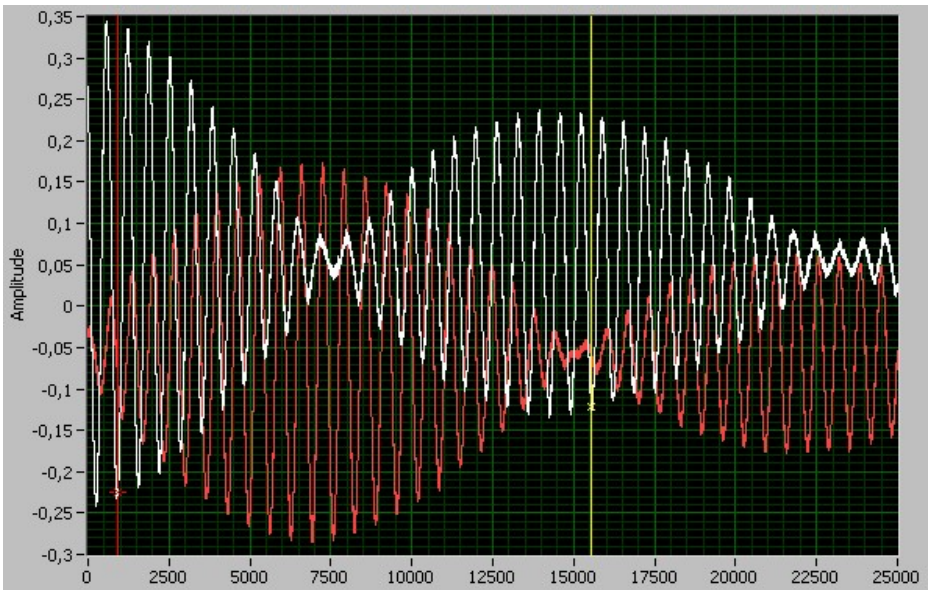

Abbildung 13: Schwebung 18cm Kopplungslänge

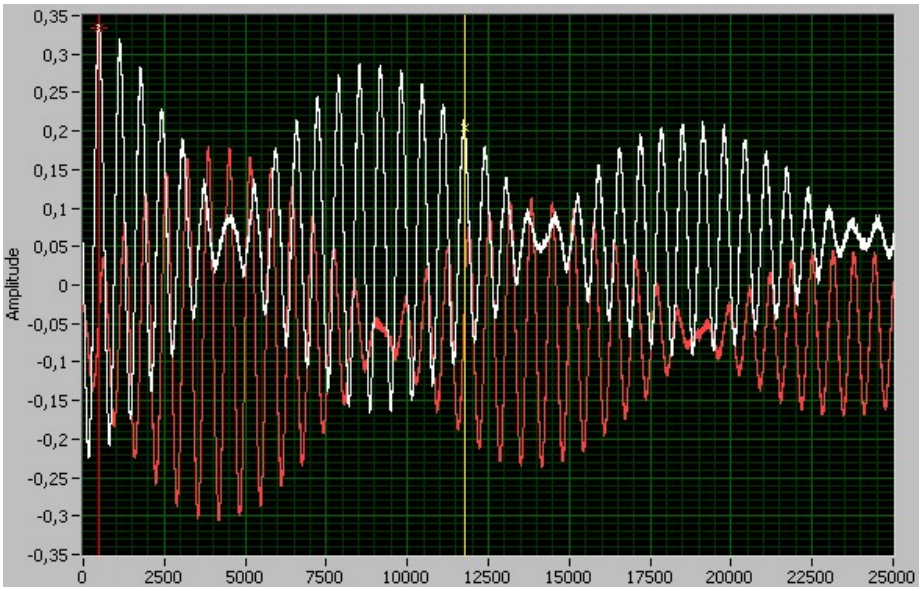

Abbildung 14: Schwebung 23cm Kopplungslänge

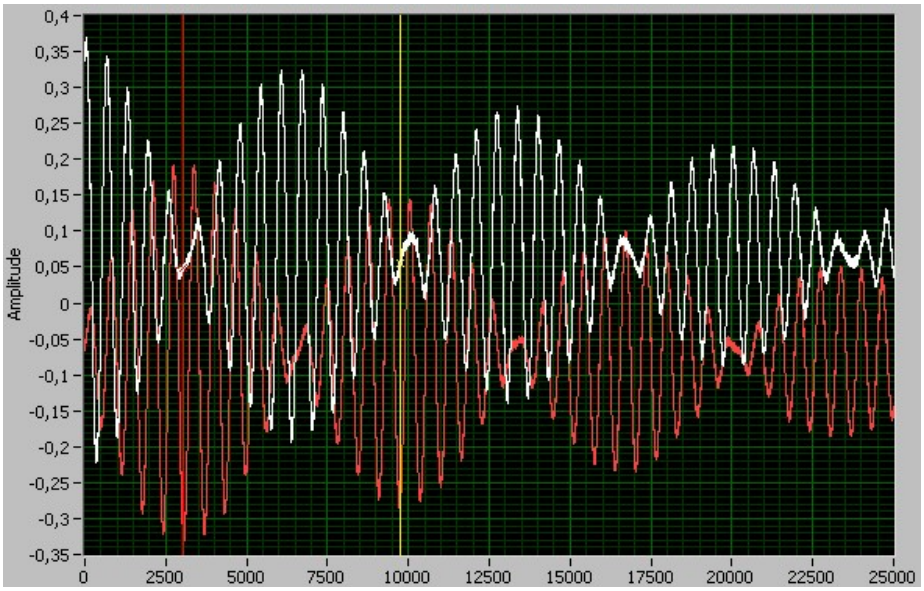

Abbildung 15: Schwebung 28cm Kopplungslänge

Auf dem ersten Bild noch nicht gut zu erkennen, da nur eine halbe Periode dargestellt wird, zeigt sich auf den unteren beiden Bildern deutlich die Schwebung.

Die schnelle Schwingung wird - wie nach der Theorie - durch eine weitere, wesentlich langsamere Schwingung überlagert, die ein Maß für die Amplitude der schnellen Schwingung ist. Die langsamen Schwingungen sind um eine halbe Schwebungsdauer verschoben. Das sich in Bewegung befindende Pendel überträgt durch die Kopplung seine Energie auf das andere, ruhende Pendel bis es schließlich selbst keine Energie mehr aufweißt. Dies wiederholt sich periodisch.

Die Amplitude der langsamen Schwingung verändert sich nur auf Grund der Dämpfung der Pendel. Die Periodendauer der schnellen Schwingung hängt zwar von der Kopplungslänge ab - dies macht sich hier aber nicht sonderlich stark bemerkbar, da sich die gegensinnige Periodendauer auch nur wenig ändert. Viel stärker zum Tragen kommt dies bei der Schwebung. Hier sinkt die Periodendauer bei 18cm auf etwa die Hälfte bei 28cm.

3.7 Bestimmung des Kopplungsgrades

Der Kopplungsgrad ergibt sich aus den gemessenen Pendelmaßen oder aus den gemessenen Schwingungsdauern.

3.7.1 Kopplungslänge 18cm

Pendelmaße	$0{,}0480 \pm 0,0217$
gleich- und gegenphasig	$0{,}0419 \pm 0,00002$
Schwebung	$0{,}0428 \pm 0,0002$

3.7.2 Kopplungslänge 23cm

Pendelmaße	$0{,}0597 \pm 0,0170$
gleich- und gegenphasig	$0{,}0660 \pm 0,00002$
Schwebung	$0{,}0678 \pm 0,0004$

3.7.3 Kopplungslänge 28cm

Pendelmaße	$0{,}0710 \pm 0,0140$
gleich- und gegenphasig	$0{,}0910 \pm 0,00002$
Schwebung	$0{,}0962 \pm 0,0006$

3.7.4 Fehlerbetrachtung

Nimmt man die Pendelmaße zur Ermittlung des Kopplungsgrades, so weicht das Resultat stark von den mit den Schwingungsdauern ermittelten Werten ab. Dabei ist anzunehmen, dass die durch die Schwingungsdauer ermittelten Werte, welche kaum voneinander abweichen, genauer sind als die Pendelmaße.

Dies liegt daran, dass bei den Pendelmaßen grobe Näherungen zur Berechnung des Trägheitsmoments und der Schwerpunktslänge benutzt wurden. Diese Nährungen wurden auch in der Berechnung der Fehler nicht beachtet. Daher ist der real gemachte Fehler noch wesentlich größer als der hier berechnete Größtfehler.

Quellen

[1] W. Demtröder, Experimentalphysik 1, Mechanik und Wärme, Axel Springer Verlag, 2006

[2] W.Walcher, Praktikum der Physik, Stuttgart, 1989

[3] David R. Lide , CRC Handbook of Chemistry and Physics, 84. Auflage, 2003

[4] J. Krause, J.Grehn, Metzler Physik, Schroedel Verlag GmbH, Hannover 2004

Anmerkung: Alle Vergleichswerte stammen von [3]