

Versuch 7

Elastizitätskonstante von kristallinen Festkörpern

Sascha Hankele
sascha@hankele.com

Kathrin Alpert
kathrin.alpert@uni-ulm.de

3. November 2006

durchgeführt am 20. Oktober 2006

Betreuer: Ralf Ameling

Inhaltsverzeichnis

1	Theoretische Grundlagen	3
1.1	Aufbau von Festkörpern	3
1.1.1	Kristallbaufehler	3
1.1.2	Molekülbindungen	5
1.2	Die elastischen Moduln	5
1.2.1	Spannung	5
1.2.2	Kompressionsmodul	6
1.2.3	Schubmodul	6
1.2.4	Elastizitätsmodul	7
1.2.5	Tensorcharakter der elastischen Konstanten	9
1.2.6	Die Spannungsdehnungskurve	10
1.3	Statische Balkenbiegung	11
1.4	Balkenschwingung	13
2	Versuchsbeschreibung	14
2.1	Statische Bestimmung des Elastizitätsmoduls	14
2.2	Dynamische Bestimmung des Elastizitätsmoduls	15
3	Versuchsauswertung	15
3.1	Bestimmung der Abmessungen der Streifen	15
3.2	Statische bestimmung des Elastizitätsmoduls	16
3.2.1	Fehlerbetrachtung	21
3.3	Biegekurve	21
3.4	Dynamische Bestimmung des Elastizitätsmoduls	22
3.4.1	Kupfer Streifen	22
3.4.2	Aluminium Streifen	23
3.5	Fehlerdiskussion	24

1 Theoretische Grundlagen

1.1 Aufbau von Festkörpern

Stoffe treten in der Natur in verschiedenen Aggregatzuständen auf: fest, flüssig und gasförmig. Festkörper definieren sich im Gegensatz zu Flüssigkeiten und Gasen durch feste und unverschiebbare Abstände. Sie lassen sich zusätzlich in zwei Kategorien einteilen: kristalline und amorphe Stoffe.

Amorphe Stoffe haben keinen echten Schmelz- und Siedepunkt und können daher auch als unterkühlte Flüssigkeiten mit einer äußerst hohen Viskosität aufgefasst werden. Diese Stoffe ändern ihren Aggregatzustand nur langsam.

Auf Grund der schnell abnehmenden Molekülbindungen schon bei kleinem Abstand gibt es nur eine Nahordnung. Amorphe Stoffe sind isotrop in ihren physikalischen Eigenschaften. Wachs, Teer und Glas sind gute Beispiele für amorphe Stoffe.

Kristalle besitzen im Gegensatz zu den amorphen Stoffen eine Fernordnung, d.h. einen räumlich geordneten Aufbau. Grundlegend gibt es 14 verschiedene Elementarzellen, durch die sich der Aufbau eines Kristalls definiert. Diese lassen sich in sieben Kristallfamilien unterteilen: triklinmonoklin, rhombisch, trigonal, tetragonal, hexagonal und kubisch.

Aus den Elementarzellen lässt sich durch Verschieben der Aufbau des Kristalls rekonstruieren. Zusätzlich gibt es noch Polykristalle, die aus kleinen durch Defektstrukturen voneinander abgegrenzten Einkristallen aufgebaut sind.

Kristalle zeichnen sich weiter dadurch aus, dass sie feste Schmelz- und Siedepunkte besitzen. Oft sind Kristalle auf Grund ihres regelmäßigen Gitteraufbaus anisotrop in verschiedenen physikalischen Eigenschaften. Der Piezo Effekt, die optische Doppelbrechung und die elektrische Leitfähigkeit sind gute Beispiele dafür.

1.1.1 Kristallbaufehler

Reale Kristalle unterscheiden sich auf Grund ihres Entstehungsprozesses von Idealkristallen dadurch, dass Fehlordnungen auftreten können. Diese Kristallbaufehler ordnet man nach ihrer geometrischen Ausdehnung. Zu dreidimensionalen Fehlordnungen gehören die amorphen Stoffe, zu zweidimensionalen gehören Flächen im Kristall, an denen die Gitterperiodizität unterbrochen ist. Eindimensionale Fehler sind sogenannte Versetzungen und null-dimensionale werden als Punktfehler bezeichnet.

Punktfehler Die einfachsten Punktfehler sind sogenannte Schottky-Defekte, bei denen ein Atom irgendwo in der Struktur fehlt. Ist ein Atom zu viel auf einem Zwischengitterplatz vorhanden, so spricht man von einem Anti-Schottky-Defekt. Tritt beides gleichzeitig auf, so dass ein Atom an der regulären Position fehlt und ein anderes einen Zwischengitterplatz

einnimmt, so spricht man von Frenkel-Defekten. Diese Fehlernordnungen werden häufig auch Eigenfehlernordnungen genannt.

Chemische Fehlernordnungen Dieser Fehler tritt auf, falls Fremdatome auf regulären Gitterplätzen oder Zwischengitterplätzen eingebaut sind. Bei kleinen Fremdatomen werden diese meist in das Zwischengitter eingebaut. Ein gutes Beispiel hierfür ist die Dotierung von Halbleitern. Diese Fehler wirken sich auf die optischen und elektrischen Eigenschaften des kristallinen Festkörpers aus.

Versetzungen Anschaulich lässt sich eine Versetzung so erklären, dass der Kristall entlang einer Schnittfläche teilweise aufgetrennt wird. Ein Teil der Netzebene wird dann um einen geringen Betrag nach unten versetzt. Danach wird der Kristall wieder zusammengesetzt. Solch eine Versetzung kann z.B. durch eine äußere Krafteinwirkung entstehen. Bei der Stufenversetzung wird eine einseitig begrenzte Atomschicht eingeschoben.

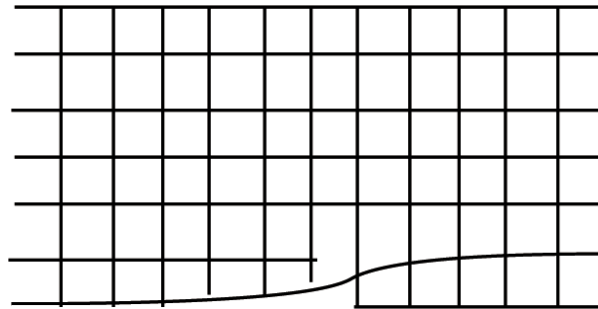


Abbildung 1: Stufenversetzung

Zweidimensionale Defekte Da ein realer Kristall eine endliche Ausdehnung besitzt, hat dieser auch eine Oberfläche. Hier wird die Translationssymmetrie unterbrochen, was den einfachsten Flächenfehler darstellt. Auch Grenzflächen zu anderen Phasen zählen daher zu den Flächenfehlern.

Im Innern eines Kristalls treten weitere zweidimensionale Fehler auf. So gibt es Korngrenzen, die den Kristall in Bereiche mit unterschiedlicher räumlicher Orientierung des Gitters aufteilen. Weiter gibt es Stapelfehler, bei denen einzelne Ebenen eines Kristalls gestört sind. Dies ist ein häufiger Fehler bei Metallen.

Kristalle, die nur Punktfehler und Versetzungen aufweisen heißen Einkristalle. Bikristalle heißen Körper die aus zwei verdrehten Einkristallen bestehen und Polykristalle bestehen aus einer großen Anzahl verdrehter Einkristalle.

In Bezug auf physikalische Eigenschaften wie Wärmeleitfähigkeit, elektrische Leitfähigkeit, Lichtgeschwindigkeit etc. lassen sich Kristalle in zwei Kategorien einteilen: Bei isotropen Kristallen sind die Eigenschaften in allen Richtungen gleich; bei anisotropen Kristallen variieren sie mit der Richtung, in der sie gemessen werden.

1.1.2 Molekülbindungen

Eine wichtige Rolle bei der Bildung der Kristallgitterstruktur spielen die Molekülbindungen. Die wichtigsten Bindungen sind bei Festkörpern:

Van-der-Waals-Kräfte entstehen durch antiparallel orientierte temporäre Dipole. Diese werden verursacht durch eine kurzzeitige Ladungsverschiebung in der Elektronenhülle eines Teilchens. Das temporäre Dipolmoment induziert im benachbarten Teilchen ein antiparalleles Dipolmoment. Insgesamt können die Kräfte zwischen nicht benachbarten Teilchen vernachlässigt werden, da die Kraft mit $\frac{1}{r^7}$ abnimmt.

Ionenbindung Unterschiedlich geladene Teilchen ziehen sich elektrostatisch an, was die Ionenbindung verursacht. Ionen entstehen, falls ein neutrales Atom Elektronen abgibt oder aufnimmt.

Kovalente Bindung Hier teilen sich zwei Atome ein gemeinsames sog. Valenzelektron. Obwohl sich also zwei Atome ein Elektron teilen, bleiben die Atome elektrisch neutral

Metallische Bindung Diese Art der Bindung ist sehr ähnlich zur kovalenten Bindung. Bei der metallischen Bindung teilen sich alle Atome eines Gitters ihre Elektronen. Diese sind relativ frei beweglich.

Wasserstoffbrückenbindung entsteht durch Anlagerung eines positiven Wasserstoffs des Dipols an ein freies Elektronenpaar, z.B. des Sauerstoffs mit Wasser.

1.2 Die elastischen Moduln

In der Physik beschreiben Module die elastischen Eigenschaften eines Festkörpers.

1.2.1 Spannung

Mit Hilfe der Definition des Druckes p lässt sich die Spannung σ ableiten. Dabei ist F die Kraft und A die Fläche.

$$p = \frac{F}{A}$$

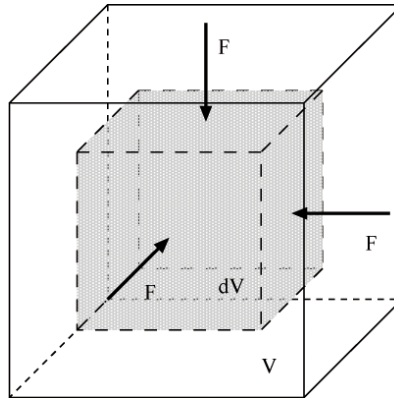
Wirkt die Kraft F senkrecht zur Fläche A , so gilt für die Normalspannung:

$$\sigma_n = \frac{F}{A}$$

Wirkt sie tangential, so gilt für die Schubspannung:

$$\sigma_t = \frac{F}{A}$$

1.2.2 Kompressionsmodul

Abbildung 2:
Kompressionsmodul

Wirkt auf einen Quader mit dem Volumen V der allseitige Druck p , so resultiert eine relative Volumenänderung $\frac{\Delta V}{V}$. Die Kompressibilität κ ist definiert als:

$$\kappa = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp}$$

Der Kehrwert davon heißt Kompressionsmodul K :

$$K = \frac{1}{\kappa} = -V \frac{dp}{dV}$$

1.2.3 Schubmodul

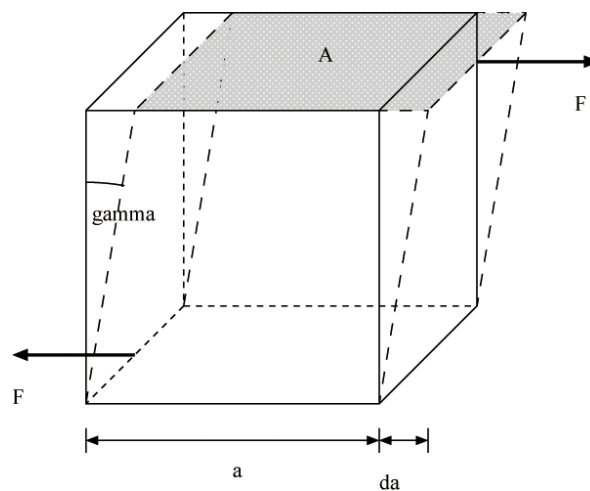


Abbildung 3: Scherung eines Quaders

Wirkt eine Schubspannung σ_t auf die Oberfläche A eines Körpers, so wird dieser um den Winkel α geschert. Dabei bleibt das Volumen des Körpers konstant, seine Form ändert sich jedoch. Es gilt:

$$\tan \alpha = \frac{\sigma_t}{G}$$

Mit der Kleinwinkelnäherung $\tan \alpha \approx \alpha$ folgt:

$$\sigma_t = G\alpha \quad (1)$$

Wobei G der Schubmodul ist.

1.2.4 Elastizitätsmodul

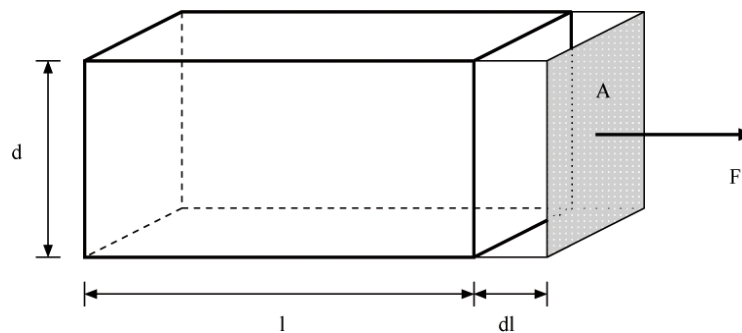


Abbildung 4: Querdehnung eines Quaders

Auf die Oberfläche A eines Körpers wirkt die Zugspannung σ . Im Hooke'schen Bereich wird die Steigung der Kurve als Elastizitätsmodul E definiert:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{Fl}{A\Delta l}$$

Poisson Zahl Durch die Dehnung eines quaderförmigen Körpers mit quadratischer Grundfläche der Länge l entsteht auch eine Querkontraktion. Dabei ändert sich die Dicke d des Körpers um Δd . Nach dem Hooke'schen Gesetz gilt:

$$\mu \frac{\Delta l}{l} = -\frac{\Delta d}{d}$$

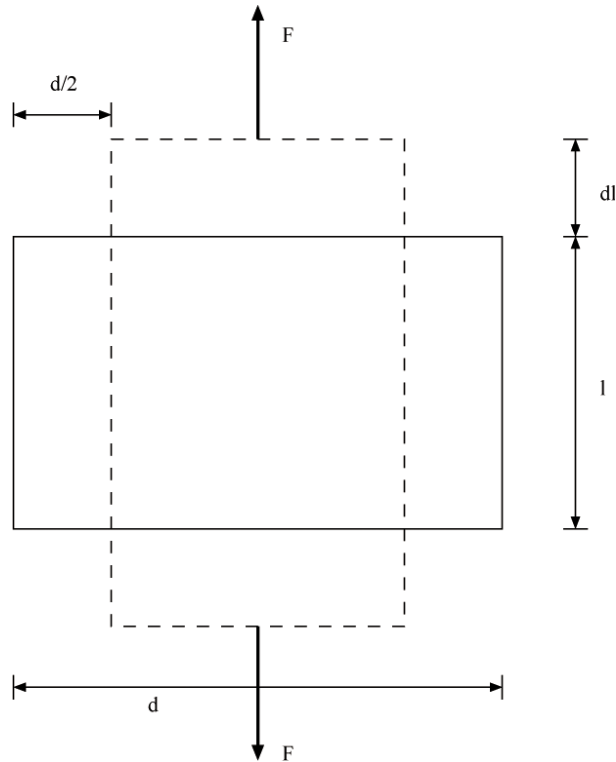


Abbildung 5: Querdehnung

Die Proportionalitätskonstante heißt Poisson Zahl μ .

$$\mu = -\frac{l\Delta d}{d\Delta l}$$

Mit Hilfe der relativen Volumenänderung erhält man folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{V} &= \frac{(d + \Delta d)^2(l + \Delta l) - d^2l}{d^2l} \\ &= \frac{d^2\Delta l + 2d\Delta dl + 2d\Delta d\Delta l + \Delta d^2\Delta l + \Delta d^2l}{d^2l} \\ &\stackrel{\substack{\Delta d \ll d \\ \Delta l \ll l}}{=} \frac{\Delta l}{l} + \frac{2\Delta d}{d} \\ &= \frac{\Delta l}{l}(1 - 2\mu) \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &= \epsilon(1 - 2\mu) \\ &= \frac{\sigma}{E}(1 - 2\mu) \end{aligned} \tag{3}$$

Durch Gleichsetzen der rechten Seite von Gleichung (2) mit $\frac{\Delta l(\Delta d)^2}{ld^2}$ erkennt man, dass $\mu \leq 0,5$ ist. Mit Gleichung (3) und $\varepsilon > 0$ ergibt sich $\Delta V > 0$. In der Realität liegt die Poisson Zahl zwischen 0,2 und 0,5. Für Flüssigkeiten ergibt sich als Poisson Zahl 0,5, da diese inkompressibel sind.

1.2.5 Tensorcharakter der elastischen Konstanten

Da Kräfte in beliebiger Richtung auf einen Körper wirken können, kann es zu Dehnung, Stauchung, Scherung, Kompression und Entspannung eines Körpers kommen. Man bedient sich der Tensorschreibweise, da die Kräfte in zwei Komponenten tangential und senkrecht zur Oberfläche zerlegt werden können.

$$\vec{\sigma} = \overset{\leftrightarrow}{C} \vec{\varepsilon}$$

Dabei ist $\vec{\sigma}$ der Spannungstensor und $\vec{\varepsilon}$ der Verzerrungstensor. Der erste Index gibt die Flächennormale an und der zweite die Kraftrichtung:

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

σ_{xx} , σ_{yy} und σ_{zz} sind die Normalspannung. Die restlichen Elemente sind Schubspannungen.

$$\vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \varepsilon_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

ε_{xx} , ε_{yy} und ε_{zz} sind Dehnungen und α_{ij} mit $i, j = x, y, z$ die Scherwinkel.

Der Tensor $\overset{\leftrightarrow}{C}$ 4. Stufe (mit 81 Komponenten) verbindet $\vec{\sigma}$ und $\vec{\varepsilon}$. Auf Grund von Symmetrieeigenschaften und unter Beachtung vorhandener Potenziale reduziert sich die Anzahl der Komponenten auf 21.

1.2.6 Die Spannungsdehnungskurve

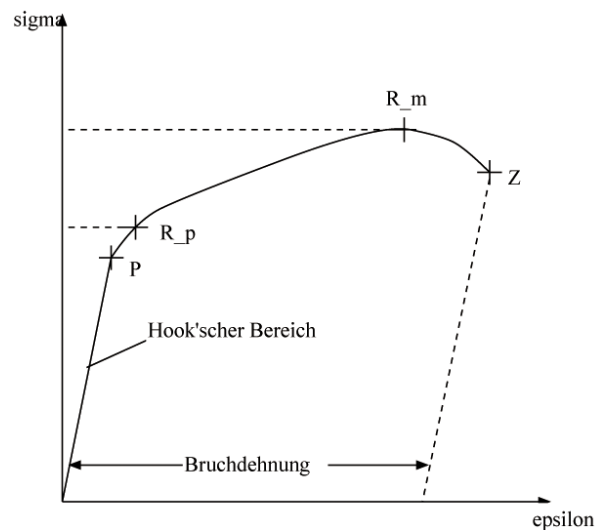


Abbildung 6: Spannungsdehnungskurve; P - Ende des Hook'schen Bereichs; R_p - Dehngrenze; R_m - Zugfestigkeit; Z - Zerreißpunkt

Das Hook'sche Gesetz gilt nur in einem Proportionalitätsbereich bis zur Grenze P . Wird die Spannung weiter bis R_p erhöht, so ist die Dehnung nicht mehr linear. Erst beim Überschreiten der Elastizitätsgrenze bleibt eine dauerhafte Formveränderung zurück. Dieser Bereich nennt sich plastischer Bereich (R_m). Durch Aufweichung der Struktur flacht die Kurve ab und der Körper beginnt zu fließen. Am Bruchpunkt Z zerreißt die Probe.

1.3 Statische Balkenbiegung

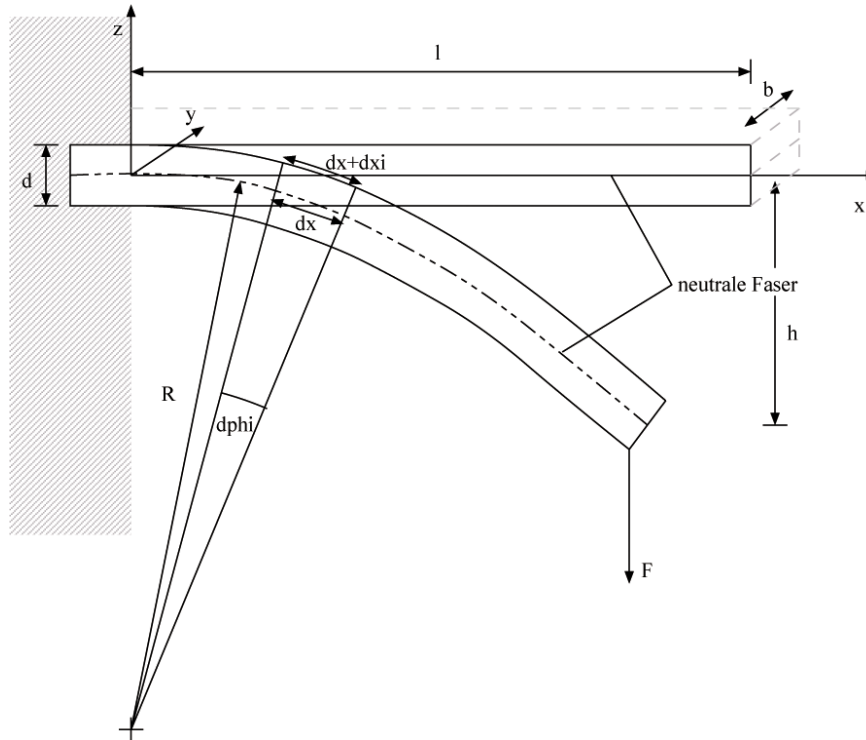


Abbildung 7: Balkenbiegung

Auf einen quaderförmigen Stab der Länge l mit dem Querschnitt d , der an einem Ende horizontal fest eingespannt ist, wirkt eine Kraft F in vertikaler Richtung. Bei der folgenden Herleitung wird das Eigengewicht des Balkens vernachlässigt. In der obigen Abbildung werden die oberen Schichten des Balkens gedehnt und die unteren gestaucht. Durch diese Betrachtungsweise erkennt man, dass es in der Mitte des Balkens eine neutrale Faser geben muss, die weder Zug noch Druck erfährt.

Wie in obiger Abbildung legen wir die x -Achse eines Koordinatensystems parallel zur Stabachse in die neutrale Ebene. Betrachtet man weiter zwei benachbarte Querschnitte der Entfernung x und $x + dx$ vom Ursprung, so bilden diese einen Winkel $d\phi = dx/R$, mit dem Krümmungsradius R der neutralen Faser NN. Damit erhält man die relative Dehnung einer Schicht im Abstand z von NN:

$$\frac{d\xi}{dx} = \varepsilon_{xx} = \frac{(R+z)d\phi - R d\phi}{dx} = z \frac{d\phi}{dx} = \frac{z}{R}$$

Nach Hooke gilt für die Spannung σ :

$$\sigma = E\varepsilon_{xx} = \frac{E}{R}z. \quad (4)$$

Hier erkennt man dass die Spannungen linear mit zunehmendem Abstand von NN linear anwachsen. Mit Hilfe von σ kann man nun die Gleichgewichtsbedingungen aufstellen. An einem Flächenelement $dA = dydz$ des am Ort x befindlichen Querschnitts wirkt die Kraft σdA . Da die Querschnitte bei der angenommenen reinen Biegungsbeanspruchung nicht verschoben werden, muss die Kraft σdA für jeden Querschnitt verschwinden. Damit erhält man die erste Gleichgewichtsbedingung:

$$\int \sigma dA = \frac{E}{R} \int z dA = 0. \quad (5)$$

Damit folgt, dass die neutrale Faser durch alle Schwerpunkte verläuft, da sich für die Schwerpunktskoordinate $z_0 = \int z dA / \int dA = 0$ ergibt. Durch die Zugkräfte auf den Querschnitt entsteht ein Drehmoment um die y-Achse. Der Betrag davon ist wegen (4):

$$M = \int z \sigma dA = \frac{E}{R} \int z^2 dA = \frac{E}{R} I. \quad (6)$$

Auf Grund der formalen Ähnlichkeit mit dem Massenträgheitsmoment wird das I in obiger Gleichung auch als Flächenträgheitsmoment bezeichnet. Für einen rechteckigen Querschnitt der Höhe d und Breite b ergibt sich

$$I_{\text{Rechteck}} = \int \int z^2 dydz = b \int_{-d/2}^{d/2} z^2 dz = \frac{1}{12} b d^3. \quad (7)$$

Das bisher betrachtete innere Moment muss mit dem Moment der äußeren Kräfte im Gleichgewicht sein. Die Last F_G erzeugt das Moment $F_G(l-x)$. Damit erhält man die zweite Gleichgewichtsbedingung:

$$\frac{E}{R} I = F_G(l-x) \quad (8)$$

$$\frac{1}{R} = \frac{F_G}{EI}(l-x). \quad (9)$$

Die Krümmung der ebenen Kurve $z(x)$ ist gegeben durch

$$\frac{1}{R} = \pm \frac{z''}{(1+z'^2)^{\frac{3}{2}}}; \quad (10)$$

Da wir bei unserer Betrachtung eine kleine Verbiegung annehmen kann z'^2 neben 1 vernachlässigt werden. Das Vorzeichen ist negativ, da z'' im gewählten Koordinatensystem negativ ist. Insgesamt ergibt sich die *Differentialgleichung der neutralen Faser*

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{F_G}{EI}(l-x). \quad (11)$$

Integriert man diese DGL zwei mal unter Beachtung, dass am festen Ende $x = 0$ und z und auch $\frac{dz}{dx}$ verschwindet, so ergibt sich die Gleichung für die neutrale Faser.

$$z = -\frac{F_G}{EI} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right), \quad (12)$$

Für die Durchbiegung bzw. den Biegepfeil ergibt sich dann:

$$h = -z(l) = \frac{l^3}{3EI} F_G$$

$$h = \frac{4}{E} \frac{l^3}{bd^3} F_G$$

Für den Elastizitätsmodul erhält man:

$$E = \frac{4}{b} \left(\frac{l}{d} \right)^3 F_G \quad (13)$$

Gut bewährt hat sich folgende Näherung für die maximale Belastung der Probe:

$$F_{\max} = \frac{1}{6} \frac{bd^2}{l} \sigma_{0,2} \quad (14)$$

wobei $\sigma_{0,2}$ eine Materialkonstante ist, die die Zugspannung bezeichnet, welche eine 0,2%-ige Verformung bewirkt.

1.4 Balkenschwingung

Ein wie im obigen Abschnitt eingespannter Balken kann auch in Schwingung versetzt werden. Mit Hilfe von 11 kann man zeigen, dass folgende Differentialgleichung für die Auswertung gilt:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{EI}{\rho q} \cdot \frac{d^4 z}{dx^4}$$

Der Ansatz $z(x, t) = u(x) \sin(\omega t + \alpha)$ liefert nach einiger Rechnung als Grundfrequenz:

$$\nu_1 = \frac{1,875^2}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho q}} \quad (15)$$

$$\Rightarrow E = \left(\frac{2\pi l^2}{1,875^2 T} \right)^2 \frac{\rho q}{I} \quad (16)$$

Setzt man hier noch $I = \frac{b}{12} d^3$ und $q = bd$ in die Gleichung ein, so folgt:

$$E = \left(\frac{2\pi l^2}{1,875^2 T} \right)^2 \frac{12\rho}{d^2} \quad (17)$$

$$\Delta E = E \left[4 \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{2\Delta T}{T} + \frac{2\Delta d}{d} \right] \quad (18)$$

2 Versuchsbeschreibung

2.1 Statische Bestimmung des Elastizitätsmoduls

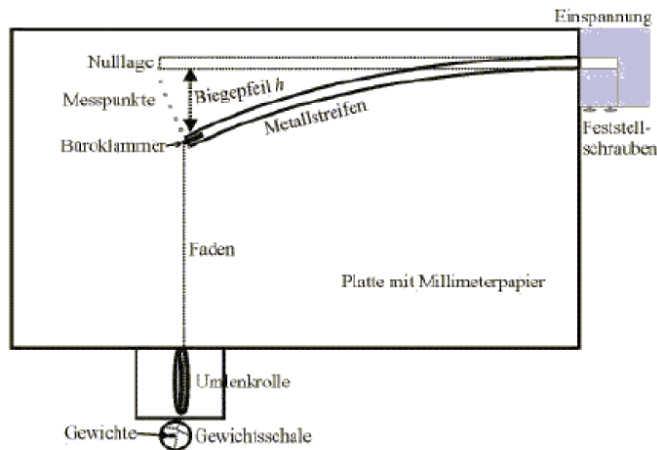


Abbildung 8: Statische Balkenbiegung

Zunächst müssen die Breite b und Dicke d der beiden Metallproben (Kupfer und Aluminium) gemessen werden. Die Streifen werden bei der statischen Methode senkrecht zum Tisch in der Halterung eingespannt, wobei der Streifen mit der Länge l aus der Halterung ragt. Das mm-Papier wird so angebracht, dass die Linien parallel zum Streifen sind.

Mit Hilfe einer Büroklammer als Befestigung, wird die von den Massen in einer Schale verursachte Gewichtskraft über eine Schnur und eine Umlenkrolle an die Probe am äußersten Punkt weitergeleitet. Diese Kraft verursacht eine Auslenkung h der Streifen, welche auf dem mm-Papier für die einzelnen Massestücke aufgetragen wird.

Mit Formel (13) lässt sich der E-Modul berechnen:

$$E = \frac{4}{b} \left(\frac{l}{d} \right)^3 \frac{mg}{h} \quad (19)$$

$$\Delta E = E \left[\frac{\Delta b}{b} + 3 \frac{\Delta l}{l} + 3 \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta h}{h} \right] \quad (20)$$

Um den Kurvenverlauf des Streifens mit dem theoretisch berechneten Verlauf vergleichen zu können, wird für jede Probe die Auslenkung bei maximaler Gewichtskraft einmal nachgefahren. Es werden dann Punkte bestimmt und in ein Auslenkungs-Abstands-Diagramm eingetragen. Der Vergleich erfolgt dann mit der theoretischen Kurve, die sich aus Gleichung (12) ergibt.

$$y(x) = \frac{6mg}{Ed^3b} \left(lx^2 - \frac{1}{3}x^3 \right) \quad (21)$$

2.2 Dynamische Bestimmung des Elastizitätsmoduls

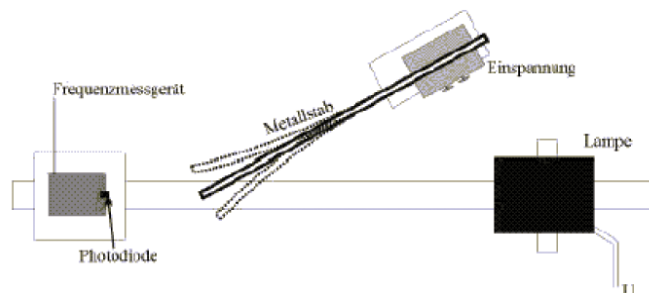


Abbildung 9: Balkenschwingung

Mit Hilfe der dynamische Methode ist es auch möglich den Elastizitätsmodul eines Metallstreifens zu bestimmen. Der Streifen wird dabei mit der Länge l so eingespannt, dass er das Lichtbündel zwischen Lichtquelle und Photozelle periodisch verdeckt und wieder freigibt. Die Periodendauer wird über einen elektrischen Zeitmesser ermittelt. Über diese Periodendauer lässt sich mit Hilfe von Formel (17) der E-Modul bestimmen.

3 Versuchsauswertung

3.1 Bestimmung der Abmessungen der Streifen

Bestimmung der Dichte durch

$$\rho = \frac{m}{bdL}$$

$$\Delta\rho = \frac{1}{dbl} \left[\Delta m + m \left(\frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta L}{L} \right) \right]$$

Kupfer-Streifen

	1	2	3	4	5	Mw
L/mm						310
$\Delta L/mm$						1
b/mm						20,1
$\Delta b/mm$						0,1
d/mm	0,50	0,51	0,51	0,51	0,50	0,506
$\Delta d/mm$	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
m/g						27,2
$\Delta m/g$						0,1
ρ/gcm^{-3}						8,627
$\Delta\rho/gcm^{-3}$						0,278

Aluminium-Streifen

	1	2	3	4	5	Mw
L/mm						302
$\Delta L/mm$						1
b/mm						20,1
$\Delta b/mm$						0,1
d/mm	0,51	0,49	0,51	0,49	0,51	0,502
$\Delta d/mm$	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,02
m/g						8,2
$\Delta m/g$						0,1
ρ/gcm^{-3}						2,691
$\Delta\rho/gcm^{-3}$						0,163

3.2 Statische bestimmung des Elastizitätsmoduls

Massen Plättchen:

	1	2	3	4	5	6
m/g	1,100	1,074	1,100	1,083	1,070	1,075
$\Delta m/g$	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001
7	8	9	10	11	12	Mw
1,052	1,092	1,080	1,076	1,094	1,103	1,083
0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,012

Die Standardabweichung ist $\Delta m = 0,0144g$.

Schale:

$$m_{Schale} = (5,489 \pm 0,001)g$$

Kupferstreifen

$$l_1 = (26,7 \pm 0,1)cm \quad \Delta h = 1mm$$

m/g	h/mm	E/GPa	$\Delta E/GPa$
5,489	15	104,958	15,197
6,572	17	110,883	15,137
7,655	21	104,554	13,069
8,738	23	108,968	13,144
9,821	27	104,329	11,894
10,904	32	97,735	10,562
11,987	35	98,233	10,341
13,070	38	98,652	10,153
14,153	42	96,653	9,697
15,236	46	95,001	9,328
16,319	49	95,524	9,246
17,402	52	95,987	9,172
18,485	55	96,399	9,106

$$E_1 = (100,606 \pm 11,234)GPa$$

Streifen gedreht um horizontale Achse.

$$l_2 = (26,7 \pm 0,1)cm \quad \Delta h = 1mm$$

m/g	h/mm	E/GPa	$\Delta E/GPa$
5,489	14	112,455	16,818
6,572	17	110,883	15,137
7,655	21	104,554	13,069
8,738	25	100,251	11,744
9,821	29	97,134	10,825
10,904	33	94,774	10,153
11,987	37	92,923	9,639
13,070	40	93,720	9,522
14,153	43	94,405	9,419
15,236	47	92,980	9,086
16,319	50	96,614	9,023
17,402	54	92,432	8,767
18,485	57	93,016	8,727

$$E_2 = (97,934 \pm 10,918)GPa$$

Streifen gedreht um vertikale Achse.

$$l_3 = (26,7 \pm 0,1)cm \quad \Delta h = 1mm$$

m/g	h/mm	E/GPa	$\Delta E/GPa$
5,489	15	104,958	15,197
6,572	19	99,211	12,929
7,655	23	95,462	11,537
8,738	26	96,395	11,144
9,821	30	93,897	10,357
10,904	34	91,986	9,772
11,987	38	90,478	9,321
13,070	42	89,257	8,962
14,153	45	90,209	8,907
15,236	49	89,185	8,638
16,319	52	90,013	8,606
17,402	56	89,130	8,395
18,485	59	89,863	8,378

$$E_3 = (93,080 \pm 10,165)GPa$$

Streifen gedreht um horizontale Achse.

$$l_4 = (26,7 \pm 0,1)cm \quad \Delta h = 1mm$$

m/g	h/mm	E/GPa	$\Delta E/GPa$
5,489	15	104,958	15,197
6,572	19	99,211	12,929
7,655	23	95,462	11,537
8,738	27	92,825	10,599
9,821	30	93,897	10,357
10,904	34	91,986	9,772
11,987	38	90,478	9,321
13,070	41	91,434	9,234
14,153	44	92,259	9,156
15,236	47	92,980	9,086
16,319	51	91,778	8,810
17,402	54	92,432	8,767
18,485	57	93,016	8,727

$$E_4 = (94,055 \pm 10,269)GPa$$

Gesamter Mittelwert

$$\bar{E} = (96,419 \pm 10,662)GPa$$

$$E_{lit} = 123GPa$$

Alustreifen

$$l_1 = (27,5 \pm 0,1)cm \quad \Delta h = 1mm$$

m/g	h/mm	E/GPa	$\Delta E/GPa$
5,489	20	88,081	16,562
6,572	25	84,368	14,984
7,655	30	81,892	13,972
8,738	34	82,481	13,730
9,821	39	80,819	13,134
10,904	44	79,534	12,682
11,987	49	78,512	12,328
13,070	53	79,144	12,297
14,153	57	79,688	12,269
15,236	62	78,868	12,026
16,319	66	79,354	12,017
17,402	70	79,785	12,009
18,485	74	80,169	12,001

$$E_1 = (80,977 \pm 13,078)GPa$$

Streifen gedreht um horizontale Achse.

$$l_2 = (27,5 \pm 0,1)cm \quad \Delta h = 1mm$$

m/g	h/mm	E/GPa	$\Delta E/GPa$
5,489	20	88,081	16,562
6,572	25	84,368	14,984
7,655	30	81,892	13,972
8,738	35	80,124	13,271
9,821	39	80,819	13,134
10,904	43	81,384	13,020
11,987	48	80,147	12,618
13,070	52	80,666	12,563
14,153	56	81,111	12,514
15,236	60	81,497	12,471
16,319	64	81,834	12,432
17,402	68	82,132	12,397
18,485	72	82,396	12,365

$$E_2 = (82,035 \pm 13,254)GPa$$

Streifen gedreht um vertikale Achse.

$$l_3 = (27,5 \pm 0,1)cm \quad \Delta h = 1mm$$

m/g	h/mm	E/GPa	$\Delta E/GPa$
5,489	20	88,081	16,562
6,572	25	84,368	14,984
7,655	31	79,251	13,437
8,738	35	80,124	13,271
9,821	40	78,798	12,755
10,904	44	79,534	12,682
11,987	49	78,512	12,328
13,070	53	79,144	12,297
14,153	57	79,688	12,269
15,236	61	80,161	12,244
16,319	65	80,575	12,221
17,402	68	82,132	12,397
18,485	72	82,396	12,365

$$E_3 = (80,982 \pm 13,062)GPa$$

Streifen gedreht um horizontale Achse.

$$l_4 = (27,5 \pm 0,1)cm \quad \Delta h = 1mm$$

m/g	h/mm	E/GPa	$\Delta E/GPa$
5,489	20	88,081	16,562
6,572	25	84,368	14,984
7,655	30	81,892	13,972
8,738	35	80,124	13,271
9,821	40	78,798	12,755
10,904	44	79,534	12,682
11,987	49	78,512	12,328
13,070	53	79,144	12,297
14,153	57	79,688	12,269
15,236	61	80,161	12,244
16,319	65	80,575	12,221
17,402	69	80,941	12,200
18,485	73	81,267	12,181

$$E_4 = (81,007 \pm 13,074)GPa$$

Gesamter Mittelwert:

$$\bar{E} = (81,250 \pm 13,117)GPa$$

$$E_{lit} = 71GPa$$

3.2.1 Fehlerbetrachtung

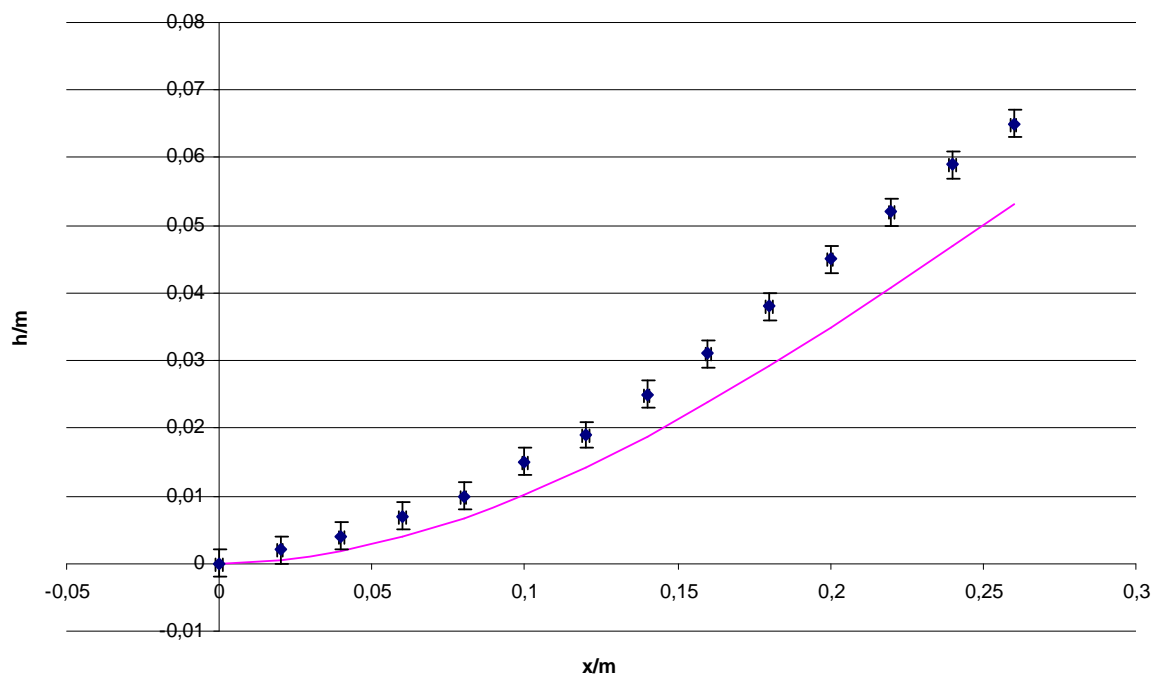
Der Wert des E-Moduls weicht bei Kupfer um 21,61% und bei Aluminium um 14,44% vom Literaturwert ab. Die Abweichung ist also nur bei Kupfer größer als der berechnete Fehler. Diese Abweichung könnte verschiedene Ursachen haben: So ist es möglich, dass die Kraft nicht senkrecht angreift. Auch die Materialbeschaffenheiten können von den hier angenommenen Idealwerten abweichen.

3.3 Biegekurve

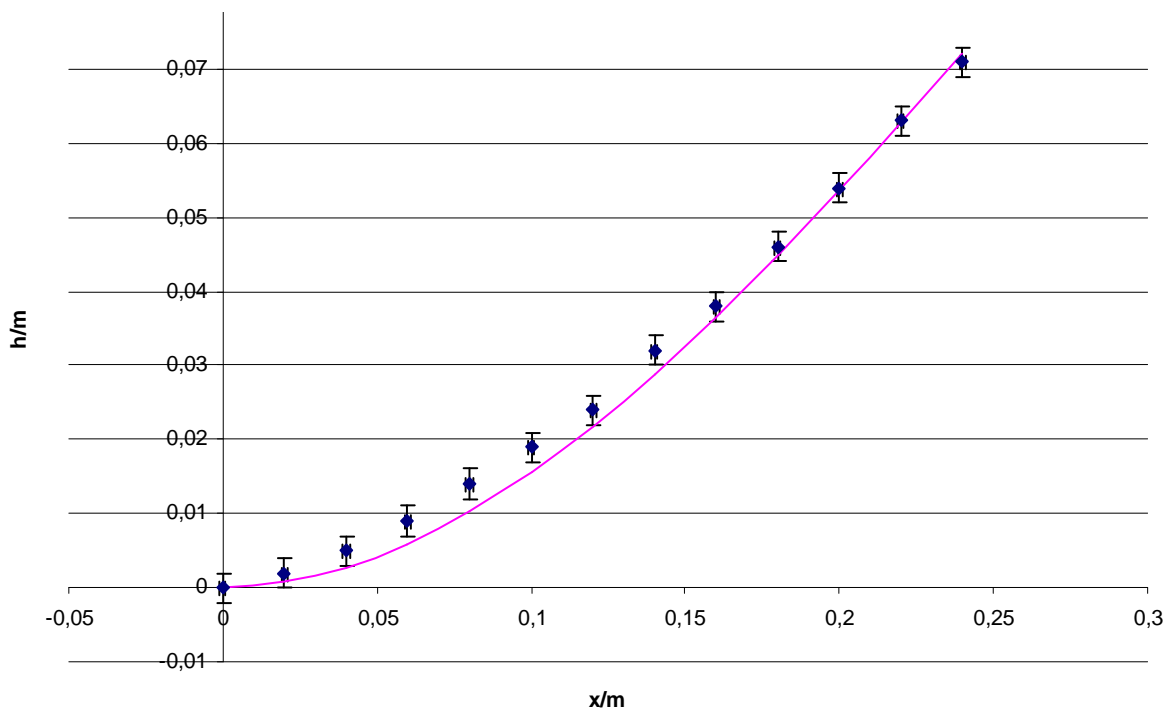
Da der Streifen beim Nachfahren schnell seine Form verändern kann, ergeben sich folgende Ungenauigkeiten:

$$\Delta x = 1\text{mm} \quad \Delta h = 2\text{mm}$$

In folgenden Abbildungen sind die abgelesenen Auslenkungen mit Fehler eingetragen. Dies ermöglicht den Vergleich mit der theoretischen Kurve.



Biegekurve von Kupfer



Biegekurve von Aluminium

Bei Kupfer stimmt die Biegekurve nicht mit der theoretisch berechneten Kurve überein. Dies liegt allerdings daran, dass die Auslenkung der Kurve um 1cm größer ist als die Auslenkung bei der Einzelmessung. Es wurde wohl beim zeichnen der Biegekurve eine zusätzliche Kraft von oben ausgeübt, so dass die Auslenkung zu groß wurde

Die Aluminiumkurve stimmt im Gegensatz dazu recht gut mit der theoretisch berechneten Kurve überein. Hier ist die maximale Auslenkung auch identisch mit den vorhergegangenen Versuchen. Die hier vorhandene Abweichung kann durch eine ungleichmäßige Dicke des Streifens verursacht werden.

3.4 Dynamische Bestimmung des Elastizitätsmoduls

Die Fehler bei der Messung sind:

$$\Delta T = 200 \mu s \quad \Delta l = 0.5 \text{ mm}$$

3.4.1 Kupfer Streifen

1. Seite

l/cm	$\bar{T}/\mu s$	$\Delta \bar{T}/\mu s$	E_1/GPa	$\Delta E_1/\text{GPa}$
26,1	255610	628	133,126	16,695

2. Seite

l/cm	$\bar{T}/\mu s$	$\Delta\bar{T}/\mu s$	E_2/GPa	$\Delta E_2/GPa$
27,8	292254	753	116,435	14,630

3. Seite

l/cm	$\bar{T}/\mu s$	$\Delta\bar{T}/\mu s$	E_3/GPa	$\Delta E_3/GPa$
28,1	305933	424	111,228	13,710

4. Seite

l/cm	$\bar{T}/\mu s$	$\Delta\bar{T}/\mu s$	E_4/GPa	$\Delta E_4/GPa$
28,4	311691	1595	109,177	14,273

Mittelwert aller Messungen:

$$\overline{E_{Cu}} = 117,492GPa \pm 14,827GPa$$

$$E_{lit} = 123GPa$$

3.4.2 Aluminium Streifen**1. Seite**

l/cm	$\bar{T}/\mu s$	$\Delta\bar{T}/\mu s$	E_1/GPa	$\Delta E_1/Pa$
26,2	171999	310	59,843	9,173

2. Seite

l/cm	$\bar{T}/\mu s$	$\Delta\bar{T}/\mu s$	E_2/GPa	$\Delta E_2/Pa$
26,2	177882	400	57,864	8,922

3. Seite

l/cm	$\bar{T}/\mu s$	$\Delta\bar{T}/\mu s$	E_3/GPa	$\Delta E_3/Pa$
25,8	172692	2055	59,623	10,345

4. Seite

l/cm	$\bar{T}/\mu s$	$\Delta\bar{T}/\mu s$	E_4/GPa	$\Delta E_4/Pa$
26,6	189199	301	54,403	8,316

Mittelwert aller Messungen:

$$\overline{E_{alu}} = 57,933GPa \pm 9,189Pa$$

$$E_{lit} = 71GPa$$

Fehlerbetrachtung Der Wert des E-Moduls weicht bei Kupfer um 4,48% und bei Aluminium um 18,40% vom Literaturwert ab.

3.5 Fehlerdiskussion

Bei Kupfer weichen die Restultate um 21,86% voneinander ab. Dabei dürfte der dynamische Wert besser als der statische Wert sein. Der dynamische Wert weicht nur um 4,48% vom Literaturwert ab. Dies liegt im Rahmen des berechneten Fehlers.

Die Werte der Aluminium Messung unterscheiden sich um 40,25%. Der Streifen wurde eventuell nicht fest genug eingespannt und dadurch die dynamische Messung verfälscht. Auch die Ausrichtung bei der dynamischen Mehthode kann Probleme bereiten.

Auch nicht beachtet wurde während der dynamischen Messung die Luftreibung, welche zwar keine große Rolle spielt, aber trotzdem beachtet werden müsste. Zusätzlich sind die Streifen nicht ideal quaderförmig und weisen Unebenheiten in der Beschaffenheit auf. Dadurch erfordert die Auslenkung mehr Kraft und die gemessenen Werte werden verfälscht.

Quellen

[1] W. Demtröder, Experimentalphysik 1, Mechanik und Wärme, Axel Springer Verlag, 2006

[2] W.Walcher, Praktikum der Physik, Stuttgart, 1989

[3] David R. Lide , CRC Handbook of Chemistry and Physics, 84. Auflage, 2003

[4] J. Krause, J.Grehn, Metzler Physik, Schroedel Verlag GmbH, Hannover 2004

Anmerkung: Alle Vergleichswerte stammen von [3]

Bildnachweis

[1] Dominik Schmid-Lorch, Praktikumsprotokoll von 2004

Versuchsbilder und Skizzen stammen von [1]