

Versuch 10

Bestimmung des Adiabatenexponenten von Gasen

Sascha Hankele
sascha@hankele.com

Kathrin Alpert
kathrin.alpert@uni-ulm.de

17. November 2006

durchgeführt am 03. November 2006

Betreuer: Michael Holzwarth

Inhaltsverzeichnis

1	Theoretische Grundlagen	3
1.1	Wärmekapazitäten	3
1.2	Zustantsgleichungen	4
1.2.1	Zustandsgleichung für ideale Gase	4
1.2.2	Poisson'sche Zustandsgleichungen	5
2	Versuchsbeschreibung	6
2.1	Bestimmung von κ nach Rüchardt	6
2.2	Bestimmung von κ nach Clément-Desormes	8
3	Versuchsauswertung	10
3.1	Bestimmung von κ von Kohlenstoffdioxid, Stickstoff und Argon nach Rüchardt	10
3.1.1	Kohlenstoffdioxid.	10
3.1.2	Stickstoff.	12
3.1.3	Argon.	13
3.1.4	Fehlerbetrachtung	14
3.2	Bestimmung des Adiabatenexponenten der Luft nach Clément-Desormes .	15
3.2.1	Berechnung	15
3.2.2	Fehlerbetrachtung	15

1 Theoretische Grundlagen

1.1 Wärmekapazitäten

Die molekulare Wärmekapazität C ist diejenige Wärmemenge, die man einem Mol eines Stoffes zuführen muss, um seine Temperatur um $\Delta T = 1K$ zu erhöhen. Diese lässt sich messen mit Hilfe von:

$$C_x := \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_x \quad (1)$$

Dabei ist x die konstant gehaltene Größe. Bei Gasen ist dies wichtig, da die spezifische Molwärme eines Gases davon abhängt, ob das Gas bei konstantem Druck oder konstantem Volumen erwärmt wird.

Für konstantes Volumen V gilt $dV = 0$, womit sich mit Hilfe des 1. Hauptsatzes ergibt:

$$C_V := \left(\frac{\delta U}{dT} \right)_V$$

Die innere Energie U eines Gases vom Volumen V setzt sich aus der Translationsenergie, eventuell vorhandener Rotations- und Schwingungsenergie und der potentiellen Energie gegenseitiger Wechselwirkung der einzelnen Teilchen zusammen. Sie hängt also von der Anzahl der Freiheitsgrade f der Teilchen ab. Die mittlere freie Energie eines Teilchens ist $\frac{1}{2}fkT$. Für ein Gas mit einem Mol erhält man damit:

$$U = \frac{1}{2}fRT$$

Für die Wärmekapazität ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} dU &= C_V dT \\ \Rightarrow \frac{1}{2}fRdT &= C_V dT \\ \Rightarrow C_V &= \frac{1}{2}fR \end{aligned}$$

Bei konstantem Druck p ergibt sich:

$$C_p = \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_p \stackrel{1.HS}{=} \left(\frac{\delta U}{dT} \right)_p - \left(\frac{-p dV}{dT} \right)_p \quad (2)$$

Setzt man die innere Energie und die ideale Gasgleichung ein, so erhält man:

$$C_p = C_V + \frac{p \frac{R dT}{p}}{dT} = C_V + R \quad (3)$$

Adiabatexponent Mit $C_V = \frac{1}{2}fR$ folgt mit (3): $C_p = \frac{1}{2}(f+2)R$. Der Quotient aus C_p und C_V heißt Adiabatexponent:

$$\kappa = \frac{C_p}{C_V} = \frac{f+2}{f} \quad (4)$$

1.2 Zustandsgleichungen

Die Zustandsgleichungen beschreiben die Abhängigkeit der unterschiedlichen Zustandsgrößen eines Systems. Mit Hilfe der vier Zustandsgrößen (p, V, T, n) lässt sich der Zustand eines Gases vollständig und eindeutig beschreiben.

1.2.1 Zustandsgleichung für ideale Gase

Legt man die kinetische Gastheorie zu Grunde, so betrachtet man zur Herleitung ein Gasvolumen, das durch Wände begrenzt wird. Auf Grund der Bewegung der Teilchen stoßen diese gegen die Wand und verursachen einen Druck. Unter Berücksichtigung aller 3 Raumrichtungen, erhält man die Stoßzahl z pro Flächeneinheit und Zeiteinheit:

$$z = \frac{1}{6} \frac{Nv dt}{V dt} = \frac{1}{6} \nu v$$

, wobei $\nu = N/V$ ist. Damit erhält man für die Kraft F (Impuls pro Zeiteinheit):

$$F = 2zAmv = \frac{1}{3}A\nu m\bar{v}^2$$

mit der Teilchenmasse m und der Wandfläche A . Der Druck ergibt sich mit Hilfe von $p = F/A$:

$$p = \frac{1}{3} \nu m v^2 = \frac{1}{3} \frac{N}{V} m \bar{v}^2 \quad (5)$$

Mit der Definition der Wärmemenge ergibt sich:

$$\langle W \rangle_{t=} = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle_{t=} = \frac{f}{2} kT \quad (6)$$

$$\Rightarrow pV = \frac{1}{3}NfkT$$

Mit $N = nN_A$ und $R = kN_A$ und $f=3$ für ein ideales Gas ergibt sich die ideale Gasgleichung:

$$pV = nRT \quad (7)$$

1.2.2 Poisson'sche Zustandsgleichungen

Da ein adiabatischer Prozess keine Wärme mit seiner Umgebung austauscht, gilt $\delta Q = 0$. Für die innere Energie ergibt sich mit dem ersten Hauptsatz:

$$dU = \delta Q + \delta W = -p dV = n c_V dT \quad (8)$$

Teilt man dies durch die Zustandsgleichung (7) $pV = nRT$, so erhält man eine DGL:

$$-\frac{dV}{V} = \frac{c_V dT}{RT} \quad (9)$$

Durch elementare Umformungen und Integration erhält man:

$$\ln T + \frac{R}{c_V} \ln V = \text{const} \quad (10)$$

$$TV^{\frac{R}{c_V}} \stackrel{R=c_p-c_V}{=} TV^{\frac{c_p-c_V}{c_V}} \stackrel{\kappa=\frac{c_p}{c_V}}{=} TV^{\kappa-1} = \text{const} \quad (11)$$

Setzt man die ideale Gasgleichung in Gleichung (10) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} pV^\kappa &= \text{const} \\ pT^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} &= \text{const} \end{aligned} \quad (12)$$

2 Versuchsbeschreibung

2.1 Bestimmung von κ nach Rüchardt

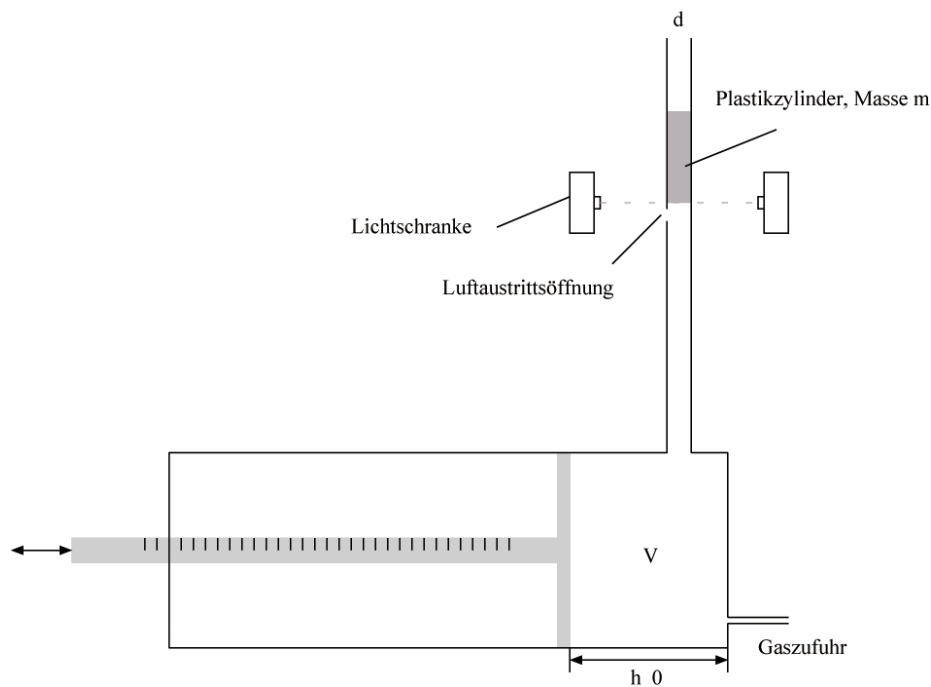


Abbildung 1: Versuchsaufbau Rüchardt

An einem großen, zylinderförmigen Gefäß mit Volumen V_0 ist nach oben ein Präzisionsglasrohr mit der Querschnittsfläche A angebracht. In diesem befindet sich ein kleines Loch. Dazu benötigt man einen exakt passenden Kolben der Masse m .

Lässt man den Schwinger von oben in das Rohr gleiten, so kann bis zu dem Moment, in dem er das seitliche Loch verschließt ein Druckausgleich zwischen Rezipienten und der Umgebung stattfinden. Der fallende Kolben komprimiert nun das Gas im Rezipienten bis er zur Ruhe kommt.

Durch die Druckdifferenz Δp zwischen innen und außen dehnt sich das Gas wieder aus und hebt den Kolben über das kleine Loch (um $\Delta V = A\Delta x$). Dieser Vorgang wiederholt sich periodisch und es stellt sich annähernd eine gedämpfte harmonische Schwingung ein.

Durch eine Gaszufuhr zum Rezipienten lassen sich die Reibungsverluste größtenteils kompensieren. Mit Hilfe einer Lichtschranke lassen sich nun die Periodendauern messen.

Der Druckausgleich durch das kleine Loch mit der Umgebung ist nur sehr kurz. Daher kann man den ganzen Prozess näherungsweise als adiabatisch betrachten. Nach (12) gilt:

$$p_0 V_0^\kappa = (p_0 + \Delta p)(V_0 + \Delta V)^\kappa \quad (13)$$

Da die Änderungen im Vergleich zum Anfangsvolumen klein sind, kann man nach Umformung entwickeln:

$$p_0 V_0^\kappa \frac{1}{(p_0 + \Delta p)} = V_0^\kappa \frac{1}{\left(1 + \frac{\Delta p}{p_0}\right)} = V_0^\kappa \left(1 + \frac{\Delta V}{V_0}\right)^\kappa \quad (14)$$

$$V_0^\kappa \left(1 - \frac{\Delta p}{p_0}\right) \approx V_0^\kappa \left(1 + \kappa \frac{\Delta V}{V_0}\right) \quad (15)$$

$$\Delta p = -\kappa p_0 \frac{\Delta V}{V_0} = -\kappa p_0 \frac{A \Delta x}{V_0} \quad (16)$$

Unter Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung ergibt sich für die Rückstellkraft F in Abhängigkeit von der Auslenkung x :

$$F = -\Delta p A = \kappa p_0 \frac{A \Delta x}{V_0} A = m \Delta \ddot{x} \quad (17)$$

Mit der Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$ erhält man die Periodendauer der Schwingung:

$$\Delta \ddot{x} + \underbrace{\frac{\kappa p_0 A^2}{m V_0}}_{:=\omega^2} \Delta x = 0 \quad (18)$$

Und weiter:

$$\omega^2 = \frac{2\pi^2}{T^2} = \frac{\kappa p_0 A^2}{m V_0} \quad (19)$$

$$\kappa = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{m V_0}{A^2 p_0} \quad (20)$$

Da das Restvolumen bei Nullstellung des Kolbens nicht bekannt ist, ersetzt man V_0 :

$$V_0 = V + V_A$$

Nach Umformung erhält man folgende Geradengleichung:

$$\begin{aligned} T^2(V) &= m_m \cdot V + c \\ T^2(V) &= \frac{4\pi^2 m}{\kappa A^2 p_0} \cdot V + \frac{4\pi^2 m}{\kappa A^2 p_0} V_A \end{aligned} \quad (21)$$

Aus der Steigung der im Experiment ermittelten Geraden erhält man damit κ .

p_0 ist der Luftdruck in der Ruhestellung des Zylinders. Dieser ist nicht identisch mit dem Luftdruck der Umgebung, da zusätzlich zum barometrischen Luftdruck b noch ein vom Kolben verursachter Scherdruck p_K beachtet werden muss:

$$p_0 = b + p_K = p_{Luft} + \frac{mg}{A} \quad (22)$$

2.2 Bestimmung von κ nach Clément-Desormes

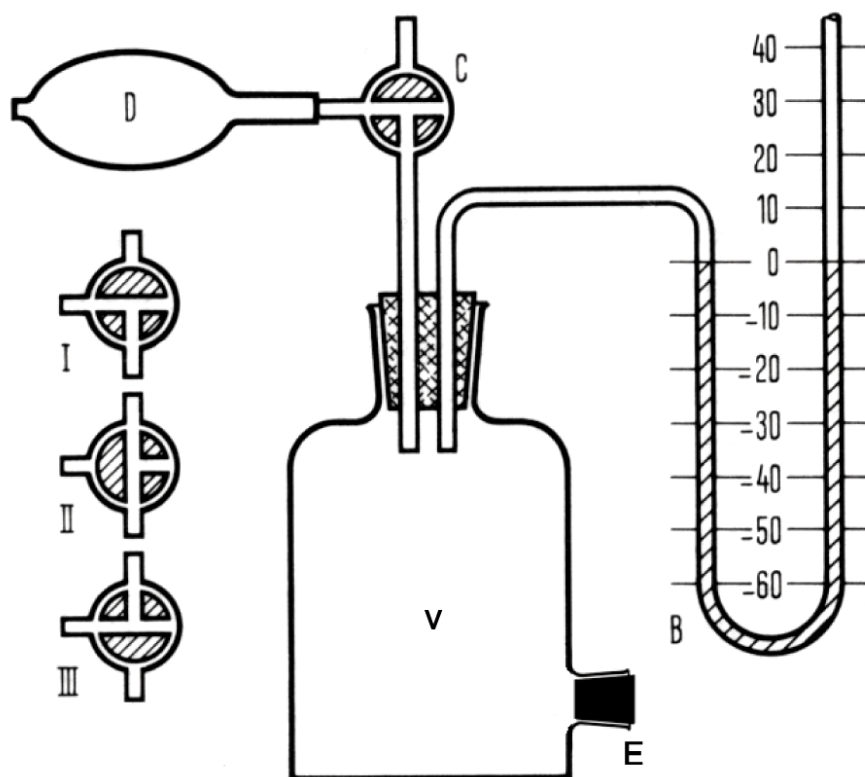


Abbildung 2: Versuchsaufbau Clément-Desormes

An einem Rezipienten ist ein Dreiweghahn und ein mit Wasser gefülltes U-Rohr angebracht, das als Manometer dient. Der Dreiweghahn dient dazu, den Rezipienten mit dem Blasebalg zu verbinden, ihn zu verschließen oder einen Druckausgleich mit der Umgebung durchzuführen.

Zuerst wird mit Hilfe des Blasebalgs ein Überdruck Δp_1 im Rezipienten erzeugt. Danach wartet man den Temperatúrausgleich mit der Umgebung ab. Die Zustandsgrößen sind dann:

$$V = V_0 \quad T = T_0 \quad p = p_0 + \Delta p_1$$

Danach wird ein Druckausgleich mit der Umgebung durchgeführt. Dabei expandiert das Gas und verrichtet gegen den äußeren Luftdruck Arbeit. Diese Energie wird der Luft in Form von Wärme entzogen:

$$V = V_0 + \Delta V \quad T = T_0 - \Delta T \quad p = p_0$$

Um einen Temperatúrausgleich bei offenem Hahn zu verhindern wird dieser schnell wieder geschlossen. Wartet man einige Zeit den Temperatúrausgleich ab, so ändert sich der Druck erneut:

$$V = V_0 \quad T = T_0 \quad p = p_0 + \Delta p_2$$

Während des Druckausgleichs mit der Umgebung findet ein Prozess statt, der in guter Näherung als adiabatisch betrachtet werden kann. Mit Gleichung (12) erhält man:

$$(p + \Delta p_1)V_0^\kappa = p(V_0 + \Delta V)^\kappa \quad (23)$$

$$T_0V_0^{\kappa-1} = (T_0 - \Delta T)(V_0 + \Delta V)^{\kappa-1} \quad (24)$$

Entwickelt man wieder analog, so erhält man aus den beiden Gleichungen von (23):

$$\frac{\Delta p_1}{p} = \kappa \frac{\Delta V}{V_0} \quad (25)$$

$$\frac{\Delta T}{T_0} = (\kappa - 1) \frac{\Delta V}{V_0} \quad (26)$$

Dividiert man (26) durch (25), so ergibt sich nach Umformung:

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{\Delta p_1}{p} \quad (27)$$

Für die letzte Zustandsänderung gilt die Ideale Gasgleichung. Setzt man diese in (27) ein, so erhält man:

$$\kappa = \frac{\Delta p_1}{\Delta p_1 - \Delta p_2} \quad (28)$$

Da die Flüssigkeitshöhe im Manometer proportional zum Druck ist, kann (28) umgeschrieben werden:

$$\kappa = \frac{\Delta h_1}{\Delta h_1 - \Delta h_2} \quad (29)$$

3 Versuchsauswertung

Außendruck: $p = (95125, 51 \pm 133, 32) Pa$. Der effektive Druck (vgl. Gleichung 22) beträgt $p_0 = (95125, 58 \pm 133, 32) Pa$

3.1 Bestimmung von κ von Kohlenstoffdioxid, Stickstoff und Argon nach Rüchardt

Schwinger:

$$m = 16,095g \pm 0.001g$$

$$d = 1.55cm \pm 0.01mm$$

Rohr:

$$r = 5.15cm \pm 0.2mm$$

$$\Delta T = 1ms$$

$$\Delta x = 0.5mm$$

$$V = \pi r^2 x$$

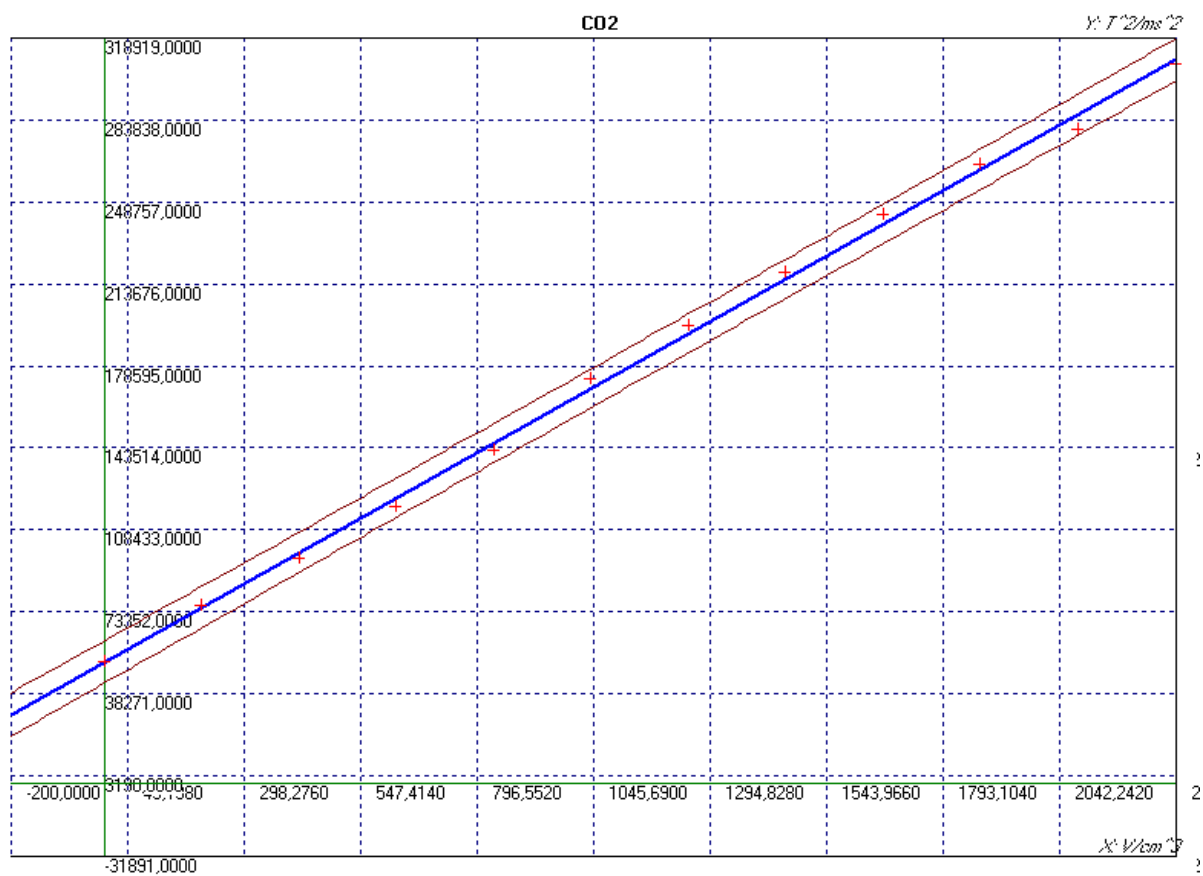
$$\Delta V = \sqrt{(2\pi x r \Delta r)^2 + (\pi r^2 \Delta x)^2}$$

3.1.1 Kohlenstoffdioxid.

x/cm	V/cm ³	$\Delta V/cm^3$	T/ms
0	0	0	227,34
2,5	208,31	0,045	275,72
5	416,61	0,053	310,70
7,5	624,92	0,064	343,68
10	833,23	0,077	377,84
12,5	1041,54	0,091	416,14
15	1249,84	0,105	442,48
17,5	1458,15	0,121	467,46
20	1666,46	0,136	493,46
22,5	1874,77	0,151	514,88
25	2083,07	0,167	529,20
27,5	2291,38	0,182	554,92

Für die Regressionsgerade ergibt sich aus den Messwerten:

$$T^2(V) = (112,66 \pm 1,437) \frac{ms^2}{cm^3} V + (51692 \pm 3580,56) ms^2$$



Aus der Steigung der Regressionsgeraden lässt sich mit Gleichung 21 κ bestimmen.

$$\kappa_{\text{CO}_2} = 1,3287 \pm 0,0797$$

$$\kappa_{\text{CO}_2, \text{lit.}} = 1,293$$

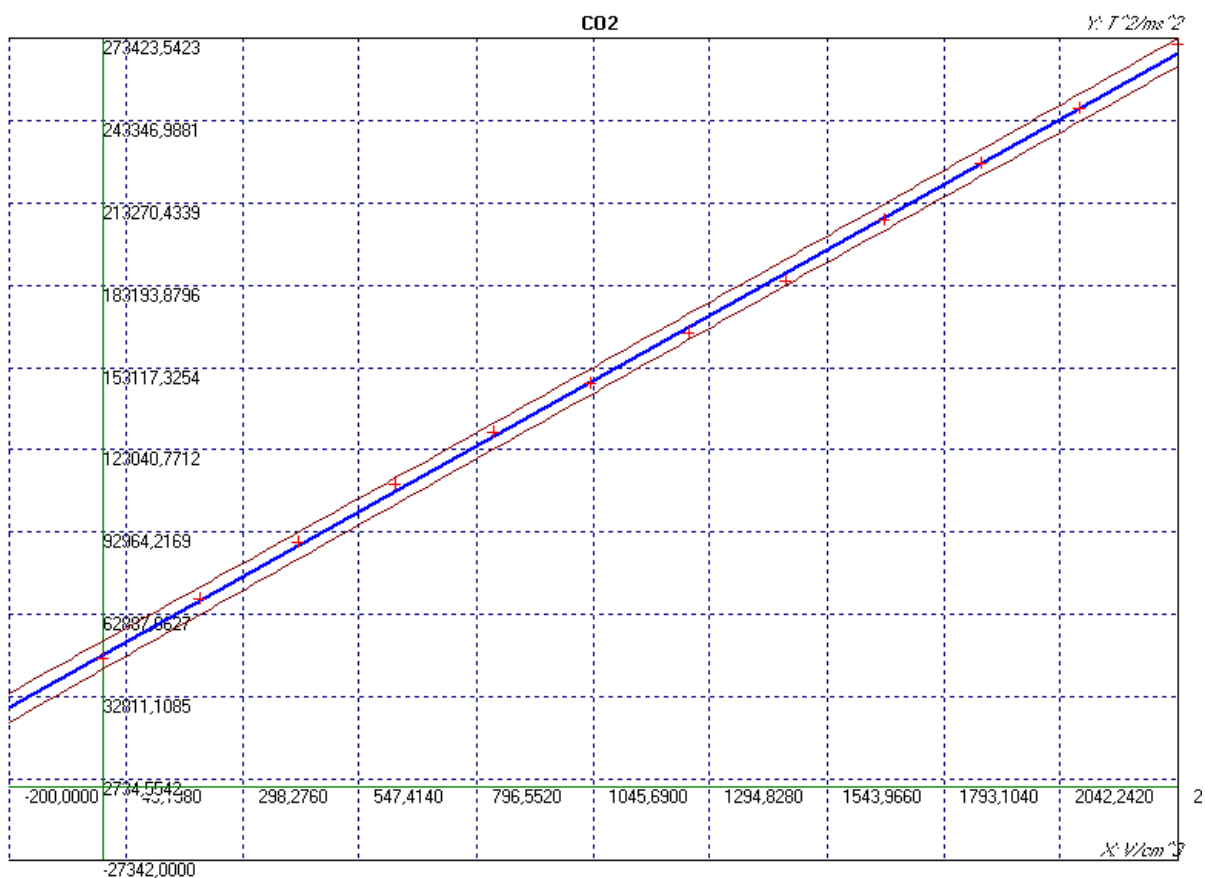
Der gemessene Wert weicht also um 2,69% vom Literaturwert ab.

3.1.2 Stickstoff.

x/cm	V/cm ³	ΔV/cm ³	T/ms
0	0	0	215,96
2,5	208,31	0,045	261,34
5	416,61	0,053	298,40
7,5	624,92	0,064	332,60
10	833,23	0,077	359,90
12,5	1041,54	0,091	383,80
15	1249,84	0,105	407,06
17,5	1458,15	0,121	429,76
20	1666,46	0,136	455,44
22,5	1874,77	0,151	477,34
25	2083,07	0,167	498,00
27,5	2291,38	0,182	521,08

Für die Regressionsgerade ergibt sich aus den Messwerten:

$$T^2(V) = (96,1912 \pm 0,8178) \frac{\text{ms}^2}{\text{cm}^3} V + (47847 \pm 2037,1750) \text{ms}^2$$



Aus der Steigung der Regressionsgeraden lässt sich mit Gleichung 21 κ bestimmen.

$$\kappa_{\text{N}_2} = 1,5562 \pm 0,0579$$

$$\kappa_{\text{N}_2,\text{lit.}} = 1.401$$

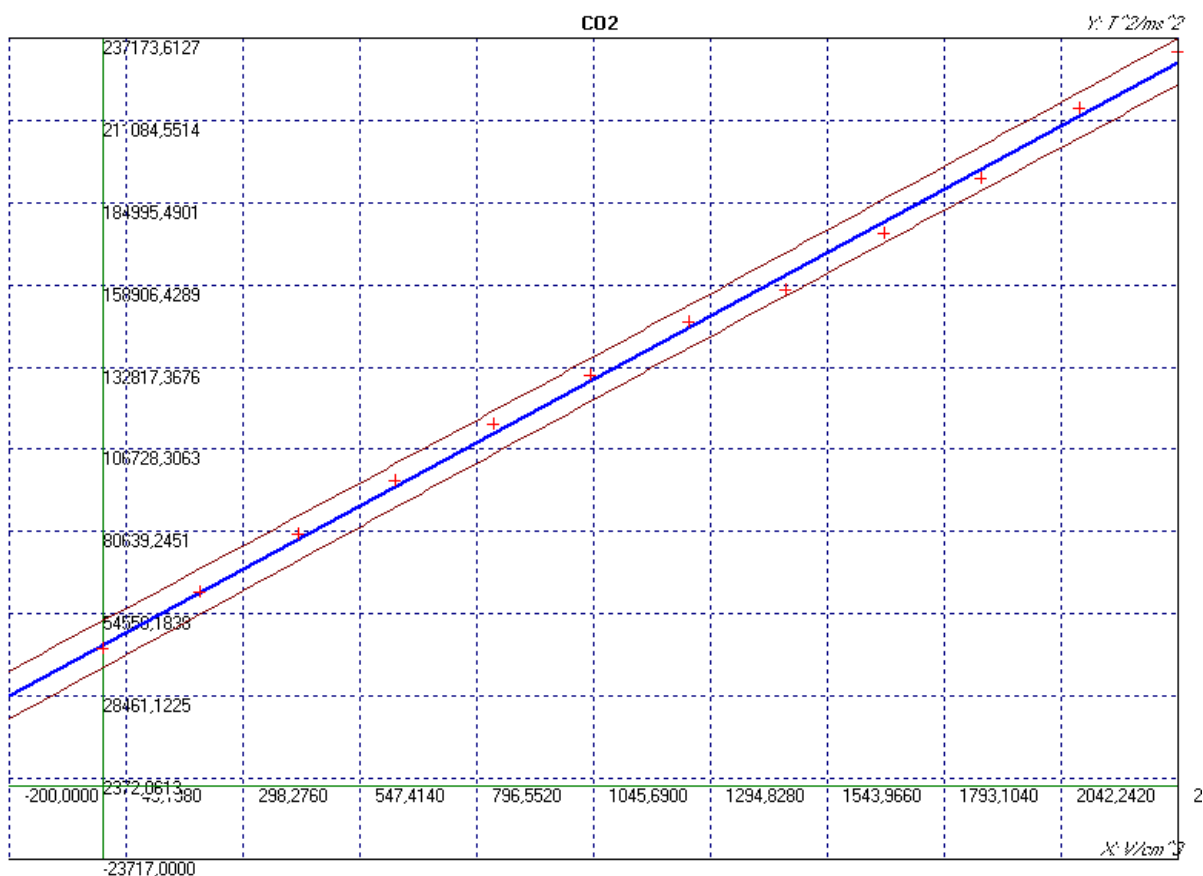
Der gemessene Wert weicht also um 9,97% vom Literaturwert ab.

3.1.3 Argon.

x/cm	V/cm ³	$\Delta V/\text{cm}^3$	T/ms
0	0	0	208
2,5	208,31	0,045	247,3
5	416,61	0,053	282,26
7,5	624,92	0,064	310,86
10	833,23	0,077	338,66
12,5	1041,54	0,091	360,60
15	1249,84	0,105	383,59
17,5	1458,15	0,121	396,72
20	1666,46	0,136	149,02
22,5	1874,77	0,151	439,14
25	2083,07	0,167	464,06
27,5	2291,38	0,182	483,00

Für die Regressionsgerade ergibt sich aus den Messwerten:

$$T^2(V) = (80,7398 \pm 1,1744) \frac{\text{ms}^2}{\text{cm}^3} V + (44750 \pm 2925,5325) \text{ms}^2$$



Aus der Steigung der Regressionsgeraden lässt sich mit Gleichung 21 κ bestimmen.

$$\begin{aligned}\kappa_{\text{Ar}} &= 1,8540 \pm 0,1072 \\ \kappa_{\text{Ar,lit.}} &= 1.648\end{aligned}$$

Der gemessene Wert weicht also um 11,11% vom Literaturwert ab.

3.1.4 Fehlerbetrachtung

Die Literaturwerte stammen aus [5]. Der Fehler von κ wurde mit dem Gauß'schen Fehler berechnet:

$$\Delta\kappa = \left(\frac{4\pi^2}{zA^2p_0}\right) \sqrt{\Delta m^2 + \left(\frac{m}{s}\Delta s\right)^2 + \left(\frac{2m}{A}\Delta A\right)^2 + \left(\frac{m}{p_0\Delta p_0}\right)^2}$$

wobei z die Steigung der Regressionsgeraden ist.

Die experimentell ermittelten Werte weichen um maximal 11,11% von den Literaturwerten ab. Dies ist deutlich mehr als durch die Fehlerrechnung erklärt wird. Daher müssen auch systematische Fehler vorhanden sein.

So lässt sich der Versuch nur näherungsweise adiabatisch durchführen. Ein weiteres Problem ist die Schwingung: Die Dämpfung soll zwar durch das nachfließende Gas aus der Druckflasche kompensiert werden - allerdings ist eine exakte Einstellung schwierig. Aus diesem Grund handelt es sich auch nicht wirklich um eine harmonische Schwingung. Zusätzlich dazu ist es möglich, dass beim Herausziehen des Kolbens statt dem gewünschten Gas auch Luft mit angesaugt wird. Auch dies verfälscht die Messung.

3.2 Bestimmung des Adiabatenexponenten der Luft nach Clément-Desormes

3.2.1 Berechnung

Bei jeder Messung erhält man ein Paar von Höhendifferenzen h_1 und h_2 :

h_1/cm	$\Delta h_1/cm$	h_2/cm	$\Delta h_2/cm$	κ	$\Delta\kappa$
13,5	0,2	2,5	0,2	1,227	0,113
15,5	0,2	2,4	0,2	1,183	0,091
16	0,2	2,5	0,2	1,185	0,089
8,7	0,2	1,3	0,2	1,176	0,161
11,8	0,2	1,8	0,2	1,180	0,119
10	0,2	1,5	0,2	1,176	0,140
14,2	0,2	2,0	0,2	1,164	0,096
13,8	0,2	2,0	0,2	1,169	0,100
9,5	0,2	1,4	0,2	1,173	0,146
15,2	0,2	1,9	0,2	1,143	0,087

Aus den Werten aus der Tabelle ergibt sich ein Mittelwert von:

$$\bar{\kappa}_{\text{Luft}} = 1,178 \pm 0,114$$

Der Literaturwert ist $\kappa_{\text{Luft,lit.}} = 1,402$, was einer Abweichung von 15,98% entspricht.

3.2.2 Fehlerbetrachtung

Für die Ermittlung des Fehlers wurde folgende Formel zugrundegelegt:

$$\Delta\kappa = \sqrt{\left(\frac{1}{h_1 - h_2} - \frac{h_1}{(h_1 - h_2)^2}\right)^2 + \left(\frac{h_1}{(h_1 - h_2)^2}\right)^2}$$

Der experimentell ermittelte Wert weicht sehr deutlich vom Literaturwert ab. Dies lässt sich nicht mehr durch den berechneten Fehler erklären. Die in der Theorie gemachten Annahmen sind nur Näherungsweise korrekt. So lässt sich der Prozess nicht vollständig adiabatisch durchführen. Auch ist der Behälter nicht vollständig dicht, so dass während der Zeit des Überdrucks schon Luft entweicht. Insgesamt wirkte auch die ganze Aperatur recht

altertümlich und die verwendeten Dichtungen waren wohl schon porös. Zusätzlich kann man die Umgebungstemperatur während des gesamten Experiments nicht als konstant betrachten. Durch die Sonneneinstrahlung hat sich die Luft wohl während des Experiments erwärmt.

Quellen

[1] W. Demtröder, Experimentalphysik 1, Mechanik und Wärme, Axel Springer Verlag, 2006

[2] W.Walcher, Praktikum der Physik, Stuttgart, 1989

[3] David R. Lide , CRC Handbook of Chemistry and Physics, 84. Auflage, 2003

[4] J. Krause, J.Grehn, Metzler Physik, Schroedel Verlag GmbH, Hannover 2004

[5]Horst Kuchling: Taschenbuch der Physik, Leipzig, 2004

Anmerkung: Alle Vergleichswerte stammen von [5]